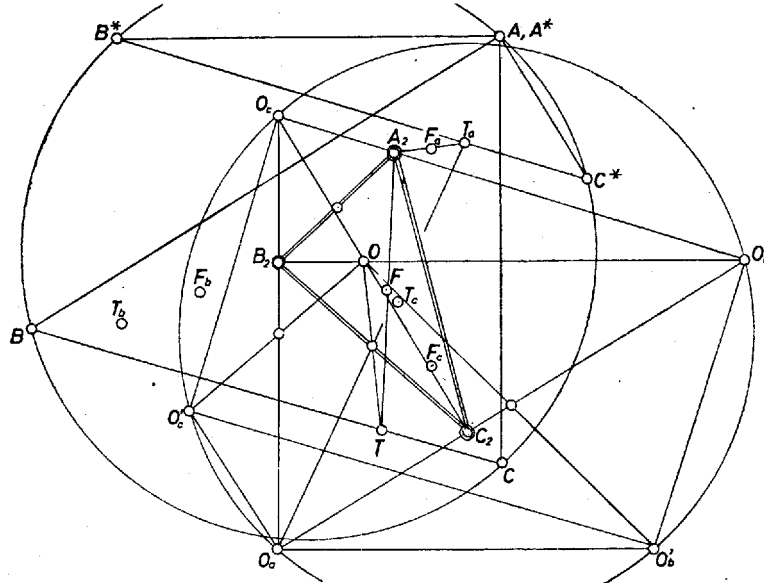


Az 1371. gyakorlat szövege a következő volt: Az ABC háromszög magasságvonalainak talppontjai rendre A_1, B_1, C_1 . Adva van (helyzet szerint) az AB_1C_1 , a BC_1A_1 és a CA_1B_1 háromszög magasságpontja. Szerkesszük meg a háromszöget. – A megoldás menete a következő volt. Jelöljük az adott magasságpontokat (H_2 csúcsait) rendre A_2 -vel, B_2 -vel és C_2 -vel, a H_2 háromszögbe írható kör középpontját O -val, a háromszöghöz hozzáírható körök középpontjait O_a -val, O_b -vel és O_c -vel. Tükrözzük az O pontot a B_2C_2 szakasz felezőpontjára, a kapott pontot jelöljük T -vel, és az O_a, O_b, O_c pontokat tükrözzük az A_2T szakasz F felezőpontjára: a kapott három tükörkép lesz a keresett háromszög három csúcsa. További megoldásokat kapunk, ha O helyére az O_a, O_b, O_c valamelyikét választjuk, és a választott pont helyére O -t tesszük. A jelen feladatunk megoldásának az alapgondolata az lesz, hogy megvizsgáljuk, milyen következményekkel jár ez a szerepcseré.

Válasszuk mondjuk O_a -t O helyett: O_a -nak a B_2C_2 szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe legyen T_a , és az A_2T_a szakasz felezőpontja legyen F_a . Ekkor a keresett háromszög csúcsai az O, O_b, O_c pontoknak az F_a -ra vonatkozó tükörképei lesznek.



1. ábra

A T és F pontok szerkesztése szerint

$$\vec{OF} = \frac{1}{2} (\vec{OA_2} + \vec{OT}) = \frac{1}{2} (\vec{OA_2} + \vec{OB_2} + \vec{OC_2}),$$

amint ezt már az 1371. gyakorlat megoldása során megjegyeztük. Hasonlóan látható, hogy

$$\vec{O_a F_a} = \frac{1}{2} (\vec{O_a A_2} + \vec{O_a B_2} + \vec{O_a C_2}),$$

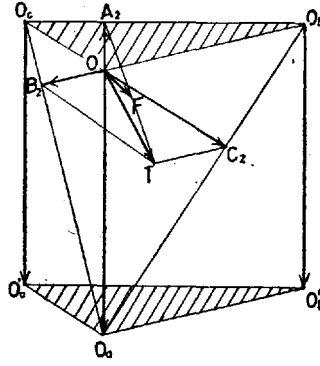
tehát

$$\vec{FF_a} = \vec{OF_a} - \vec{OF} = \vec{OO_a} + (\vec{O_a F_a} - \vec{OF}) = \vec{OO_a} - \frac{3}{2} \vec{OO_a} = -\frac{1}{2} \vec{OO_a}.$$

Ismeretes, hogy egy tetszőleges P pontnak az F_a -ra vonatkozó tükörképét úgy is megkapjuk, ha előbb eltoljuk a $2\vec{F_a F}$ vektorral, majd tükrözzük a kapott pontot F -re. Alkalmazzuk ezt az eljárást az O, O_b, O_c pontokra: toljuk el először őket a $2\vec{F_a F} = \vec{OO_a}$ vektorral, és a kapott pontokat tükrözzük F -re. Az eltolás O -t O_a -ba, O_b -t és O_c -t pedig azokba az O'_b, O'_c pontokba viszi, amelyekre (2. ábra)

$$\vec{OO_a} = \vec{O_b O'_b} = \vec{O_c O'_c},$$

tehát amelyeket O -nak az $O_a O_b, O_a O_c$ szakaszok felezőpontjára való tükrözésével is megkaphatunk.



2. ábra

Mivel O az $O_a O_b O_c$ háromszög magasságpontja, azért O'_b, O'_c rajta van az $O_a O_b O_c$ háromszög köré írható körön, vagyis az $O_a O_b O_c$ és $O_a O'_b O'_c$ háromszögek köré írható kör azonos. Nem változtat ezen az F pontra való tükrözés sem: az O -ból és O_a -ból kapott háromszögek (az 1. ábrán ABC , illetve $A^* B^* C^*$, ahol A^* azonos A -val) köré írható kör tehát azonos.

A fenti megfontolásban O_a -t O_b -vel, majd O_c -vel, felcserélve kapjuk annak a bizonyítását, hogy a másik két háromszög köré írható kör is azonos az első háromszög köré írható körrel, feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy a legutóbb talált B^* pont a közös körülírt körön a B -vel átellenes pont, a kör középpontja azonos a H_2 háromszög magasságpontjával, továbbá hogy az adódott ABC háromszög A -ból induló magasságának A_1 talppontja azonos T -vel, $A^* B^* C^*$ -ban pedig A^* vetülete $B^* C^*$ -ra azonos T_a -val.