

I. megoldás. A negyedik szám páros, ezért a harmadik páratlan, tehát 5-re végződik, így számaink utolsó jegye rendre 3, 4, 5, 6, és bennük a követelmény szerint a magasabb értékű helyeken is csak ez a négyféle számjegy fordulhat elő.

Mivel a negyedik szám osztható 4-gyel és egyes értékű számjegye 6-os, ezért a tízes értékű jegye páratlan, tehát vagy 5-ös, vagy 3-as. Így a számnégyest a következő két alak valamelyike adja meg:

$$\begin{aligned} A: & 100k + 33, & 100k + 34, & 100k + 35, & 100k + 36, \\ B: & 100m + 53, & 100m + 54, & 100m + 55, & 100m + 56, \end{aligned}$$

ahol k és m alkalmas egészek. Célszerűbbnek látszik az első alak, mert 33 osztható 11-gyel, eszerint olyan k -t keresünk, amely 11-gyel osztható, a jegyei a 3, 4, 5, 6 jegyek közül valók, továbbá amelyre

$$100k + 34 = 98k + 35 + 2k - 1, \quad \text{azaz} \quad x = 2k - 1$$

osztható 7-tel. Mivel k egy $11n$ alakú szám, azért

$$x = 2k - 1 = 22n - 1 = 21n + (n - 1),$$

ez akkor osztható 7-tel, ha $(n - 1)$ osztható 7-tel. A $11n$ szorzást a szokásos séma szerint elvégezve, azaz k -t $k = 10n + n$ alakra hozva látjuk, hogy n első és utolsó jegye ugyancsak a keresett 3, 4, 5, 6 jegyek közül való. Így n nem lehet egyjegyű, mert $(n - 1)$ nem osztható 7-tel az $n = 3, 4, 5, 6$ számokra. Kétjegyű sem lehet n , mert ekkor k középső jegye egyenlő n első és utolsó jegyének az összegével, erre a jegyre itt csak $3 + 3 = 6$ jön szóba, és ekkor $n = 33$ volna, amire $(n - 1)$ nem osztható 7-tel.

Ha n háromjegyű, mondjuk

$$n = 100a + 10b + c,$$

akkor a és c a 3, 4, 5, 6 jegyek közül való, és azt, hogy $11n$ jegyei is ezek közül valók legyenek, úgy biztosíthatjuk legegyszerűbben, hogy b értékét 0-nak választjuk. Az $a = 3$ választás mellett az $(n - 1)$ -re adódó 302, 303, 304, 305 számok egyike sem osztható 7-tel. Az $a = 4$ értékhez tartozó 402, 403, 404, 405 számok között sincs 7-tel osztható, de az 502, 503, 504, 505 között már van: az $(n - 1) = 504$ szám. Ennek az

$$n = 505, \quad k = 5555$$

paraméterpár, és az

$$555\ 533, \quad 555\ 534, \quad 555\ 535, \quad 555\ 536$$

számnégyes felel meg, melyről a kívánt oszthatóságok egy kivételével azonnal látszanak. A nem triviális oszthatóság is teljesül: $555\ 534 : 7 = 79\ 362$.

Megjegyzés. A kapott számnégyes nem a legkisebb. Az A típusúak között kisebb szám a 355 333 kezdőszámú négyes.

II. megoldás. Most B típusú számnégyest keresünk (lásd fent). Nem lehet m egyjegyű szám, mert 353, 453, 553 és 653 egyike sem osztható 11-gyel.

Kétjegyű sem lehet m , ugyanis $m = 10D + C$ esetben az első szám így alakítható:

$$100m + 53 = 11(91D + 9C + 5) + (C - D - 2),$$

itt a megengedett jegyek mellett $C - D$ értéke $+3$ és -3 közti szám, tehát csak $C - D = 2$, azaz $D = C - 2$ esetén áll be a 11-gyel való oszthatóság. Azonban a $100m + 54$ szám sem $C = 5$ és $D = 3$ esetben, sem $C = 6$ és $D = 4$ esetben nem többszöröse a 7-nek.

Háromjegyű m -mel viszont sikeres a próbálkozás. Ugyanis $m = 100E + 10D + C$ mellett az első szám:

$$100m + 53 = 11(909E + 91D + 9C + 5) + (E + C - 2 - D).$$

Itt a második tag korlátai:

$$\begin{aligned} E + C - 2 - D &\geq 3 + 3 - 2 - 6 = -2 \text{ és} \\ E + C - 2 - D &\leq 6 + 6 - 2 - 3 = 7, \end{aligned}$$

köztük csak a 0 többszöröse a 11-nek, ez a tag tehát csak úgy osztható 11-gyel, ha

$$(1) \quad E + C - 2 - D = 0, \quad D = E + C - 2.$$

Másképp ekkor a második szám

$$100m + 54 = 7(1428E + 143D + 14C + 8) + (4E - D + 2C - 2),$$

itt a második tag (1) felhasználásával $3E + C$, ami 12 és 24 közti érték, osztható 7-tel, ha $3E + C = 14$, $C = 5$ és $E = 3$, ami (1)-ből $D = 6$ -ra vezet. Valóban, a

$$36\ 553, \quad 36\ 554, \quad 36\ 555, \quad 36\ 556$$

számnégyes megfelel mindegyik feltételnek. Ezzel eleget tettünk a feladat követelésének.

Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy új megfelelő számnégyest kapunk, ha a találtak elé írjuk 77-nek olyan többszörösét, amely csak a 3, 4, 5, 6 számjegyeket tartalmazza. Ilyenek négy és öt jeggyel (szorzótáblázatból):

$$\begin{array}{cccccc} 3465, & 4466, & 4543, & 5544, & 6545, & \text{ill.} \\ 35\ 343, & 36\ 344, & 45\ 353, & 46\ 354, & 55\ 363, & 56\ 364, \end{array}$$

hat jeggyel pedig bármely $FGHFGH$ szám, hiszen ez $1001 \cdot FGH = 77 \cdot 13 \cdot FGH$. (A négy- és ötjegyűek közt is vannak 1001, ill. 10 010 különbségű párok.)