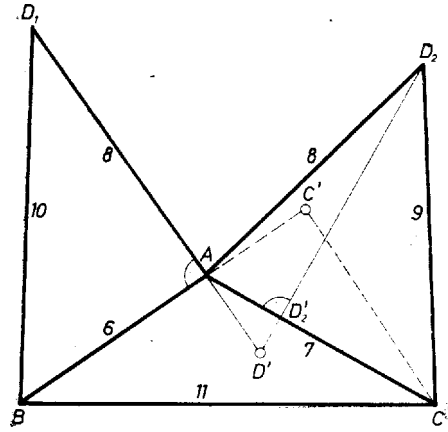


Állítsuk elő a tetraéder A csúcsában összefutó 3 lapjának papírmmodelljét. Oldalaikból megszerkesztjük papírlemezen az ABC háromszöget, majd az ABD -vel egybevágó ABD_1 háromszöget, és az ACD -vel egybevágó ACD_2 -t úgy, hogy az utóbbi kettő az AB , ill. AC közös él mentén csatlakozzék az elsőhöz, és mind a 3 háromszögünk az adott tetraéderen kívülről látható lapnak a tükörképe legyen (ellentétes körüljárással, ahogyan a lapokat belülről látnánk, 1. ábra).



1. ábra

Jelöljük D' -vel a D_1 -ből AB -re és a D_2 -ből AC -re bocsátott merőlegesek metszéspontját.

A 3 lap együttesét kivágva, fordítsuk az ABD_1 lapot AB mint tengely körül az ABC alapsík fölé, így D_1 a D_1D' egyenes fölött halad, hiszen körívet ír le az AB -re merőleges síkban, és ennek az egész síknak az alapsíkon levő vetülete a berajzolt D_1D' egyenes. Ugyanígy ACD_2 -t AC körül fordítva D_2 a D_2D' egyenes fölött halad, és D_1 és D_2 a D' fölötti D pontban találkozik, hiszen $AD_1 = AD_2 = AD$.

Így az eredeti tetraéderben D' a D csúcsnak az ABC alapsíkon levő vetülete, és $DD' = m$ az erre az alapra merőleges magassága a testnek.

Ezek szerint, ha meghatározzuk D' -nek az A, B, C csúcsok valamelyikétől való távolságát, akkor m kiszámítható a $DD'A, DD'B$, ill. $DD'C$ háromszögből. Például az elsőből

$$(1) \quad m^2 = DA^2 - D'A^2,$$

mi ezt választjuk, ugyanis $D'A$ kiszámításában előnyösen használhatjuk ki azt az észrevételt, hogy a $DAB \angle = 90^\circ$, hiszen $DB^2 = DA^2 + AB^2$.

Így D_1D' átmegy A -n, és ha még D_2D' és AC metszéspontja D'_2 , a C vetülete AB -re C' , akkor $D'D'_2A$ és $AC'C$ hasonló derékszögű háromszögek, ebből

$$(2) \quad D'A = AC \frac{D'_2A}{C'C}.$$

Ehhez a $D_2D'_2A$ és $D_2D'_2C$ derékszögű háromszögekből, majd mindjárt behelyettesítve számadatainkat

$$\begin{aligned} D'_2D_2^2 &= D_2A^2 - D'_2A^2 = D_2C^2 - D'_2C^2 = D_2C^2 - (AC - D'_2A)^2, \\ D'_2A &= \frac{AC^2 + AD^2 - CD^2}{2AC} = \frac{16}{7}. \end{aligned}$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel a $CC'B$ és $CC'A$ derékszögű háromszögekből

$$\begin{aligned} C'C^2 &= BC^2 - C'B^2 = AC^2 - (BC' - AB)^2, \\ BC' &= \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2AB} = 9, \quad \text{így} \quad CC' = \sqrt{40}, \end{aligned}$$

ennélfogva (2), majd (1) alapján

$$D'A = \frac{8}{\sqrt{10}}, \quad m^2 = 64 - \frac{64}{10} = \frac{9 \cdot 64}{10}, \quad m = \frac{24}{\sqrt{10}}.$$

$C'C$ ismeretében kiszámítható az ABC alapháromszög területe is, így pedig a tetraéder térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \frac{AB \cdot C'C}{2} = 48 \text{ térfogategység,}$$

(azaz 48 db egységnyi élű kocka térfogata).

Megjegyzések. 1. Az ABD háromszöglap derékszögét kihasználhatjuk úgy is, hogy ennek a lapnak a síkjába fordítjuk bele az ABC, ADC lapokat (2. ábra).

