

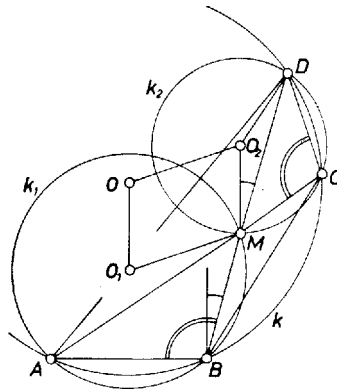
$$\begin{aligned} AO'_1 &= \frac{1}{2} AM, \\ AF' &= \frac{1}{2} (AO' + AM) = \frac{1}{4} AC + \frac{1}{2} AM, \\ AO'_2 &= \frac{1}{2} (AM + AC), \end{aligned}$$
$$(1) \quad DMO_2\triangleleft = (180^\circ - DO_2M\triangleleft)/2 = 90^\circ - DO_2M\triangleleft/2.$$

A kivonandó mindenestre hegyesszög és egyenlő a $DCM \equiv DCA$, DBA szögekkel, hacsak ezek hegyesszögek (1. ábra), tehát az utolsó alak a DBA szög pótszöge, MO_2 párhuzamos az AB -re B -ben állított merőlegessel, MO_2 merőleges AB -re, mert $MCD < 90^\circ$ alapján O_2 azon a partján van a BD egyenesnek, mint C , az A pont pedig a másik partján.

Ha pedig a $DCM \equiv DCA$, DBA szögek tompaszögek, akkor kiegészítő szögük egyenlő (1) kivonandójával, vagyis

$$DMO_2 < 90^\circ - (180^\circ - DBA <) = DBA < - 90^\circ$$

és most az A és O_2 pontok a BD egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak, tehát MO_2 ekkor is párhuzamos a B -ben AB -re állított merőlegessel (3. ábra).



3. ábra

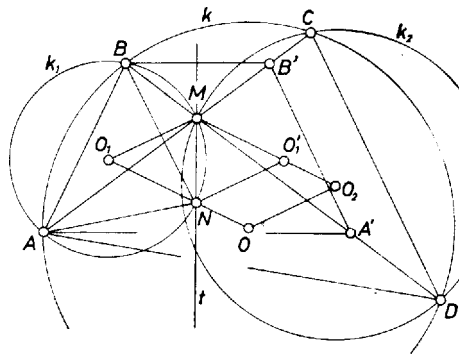
Írjunk most ábráink A, B, C, D betűje helyére rendre C, D, A, B betűt, ekkor O_1 helyére O_2 -t és O_2 helyére O_1 -et kell írunk és fenti bizonyításunk szerint az új OO_1 és új O_2M párhuzamosak, vagyis az eredeti OO_2 és O_1M párhuzamosak. Így pedig OO_1MO_2 valóban paralelogramma.

A paralelogramma OO_2 oldalegyenese a CD oldal felező merőlegese.

Ha az $ABCD$ négyszögben AB párhuzamos CD -vel, akkor felező merőlegesük azonos és a vizsgált paralelogramma elfajul.

Megjegyzés. Megoldásunkból kiolvasható a következő, önmagában is érdekes állítás bizonyítása. Ha egy háromszögben az egyik csúcsot összekötjük a körülírt kör középpontjával, és a szemközti oldalt tükrözzük a hozzátartozó szögfelezőre, merőleges egyeneseket kapunk.

III. megoldás. Jelöljük az ABM háromszög köré írt körnek, k_1 -nek és a háromszög M -beli külső szögfelezőjének, t -nek a „másik” metszéspontját N -nel (vagyis N a t és k_1 M -től különböző metszéspontja minden olyan helyzetben, ha t metszi k_1 -et, különben pedig N azonos M -mel). A kerületi szögekre vonatkozó tétel alapján N felezi a k_1 -nek az AB ívét, és így N rajta van az AB szakasz felező merőlegesén, $AN = BN$. Tükrözzük az A, B, O_1 pontokat t -re, és jelöljük a kapott pontokat A' -vel, B' -vel és O_1' -vel. A fentiek szerint $O_1MO_1'N$ rombusz, és N az $ABB'A'$ trapéz köré írható kör középpontja (4. ábra).



4. ábra

Mivel $ABCD$ konvex húrnégyszög, az MCD és $MB'A'$, háromszögek megegyező körüljárásúak, és centrálisan hasonlóak. Emiatt O_2 -t a CD szakasz NO_1' -vel párhuzamos felező merőlegese metszi ki MO_1' -ből és ugyanez a felező merőleges metszi ki O_1N -ből O -t. (Szemléletesen mondva: az M -centrumú nagyítás – vagy kicsinyítés – közben az MO_1' , NO_1 „síneken” futnak az O_2 , O pontok.) Tehát O_1MO_2O paralelogramma.

Egyszerűsítéssel Kollár János (Bpest., Piarista Gimn., II. o. t.) dolgozatából.