

Jelöljük a sorozat n -edik tagját a_n -nel, így a feladat szerint

$$(1) \quad \begin{aligned} a_1 &= 2, & a_2 &= 3, \\ a_n &= a_{n-1}a_{n+2} - 1 & (n &= 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Eszerint ha $a_{n-1} \neq 0$, akkor a_{n-1} és a_n egyértelműen meghatározza a_{n+1} értékét:

$$(2) \quad a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{a_{n-1}}.$$

Nevezetesen, ha a_{n-1} és a_n pozitívak, akkor a_{n+1} , is pozitív, ha tehát a_1 , és a_2 pozitív, akkor a_1 és a_2 értéke, és az (1) követelmény egyértelműen meghatározza a teljes sorozatot (és e sorozat minden tagja pozitív). Így van ez a feladatban szereplő sorozat esetén is, ennek néhány kezdeti tagját (2) szerint meghatározva a következő értékeket kapjuk:

$$a_3 = 2, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = 1, \quad a_6 = 2, \quad a_7 = 3.$$

Azt látjuk, hogy $a_6 = a_1$ és $a_7 = a_2$, így pedig $a_8 = a_3$, $a_9 = a_4$, $a_{10} = a_5$, a sorozat tagjai ötösével periodikusan ismétlődnek, hiszen minden új tag kiszámításához csak a közvetlen előtte álló két tagot használjuk fel.

Az első 5 tag összege 9, a periódusok száma $1095:5 = 219$, tehát a kívánt összeg $219 \cdot 9 = 1971$.

Csapó György (Debrecen, KLTE Gyak. Ált. Isk., 8. o. t.)

Megjegyzés. A látott ismétlődés nem a megadott két tag értékén múlik, hanem az (1) képezési szabályon. Ha ugyanis az első két tag a_1 és a_2 , akkor

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1 + a_2}{a_1}, & a_4 &= \frac{1 + a_3}{a_2} = \frac{a_1 + 1 + a_2}{a_1 a_2}, & \text{ha } a_1, a_2 &\neq 0; \\ a_5 &= \frac{1 + a_4}{a_3} = \frac{\frac{(1 + a_1)(1 + a_2)}{a_1 a_2}}{\frac{1 + a_2}{a_1}} = \frac{1 + a_1}{a_2}, & \text{ha } 1 + a_2 &\neq 0; \\ a_6 &= \frac{1 + a_5}{a_4} = \frac{(a_2 + 1 + a_1)a_1 a_2}{a_2(a_1 + 1 + a_2)} = a_1, & \text{ha } 1 + a_1 + a_2 &\neq 0; \\ a_7 &= \frac{1 + a_6}{a_5} = a_2. \end{aligned}$$

Eszerint csak akkor nem képezhető a sorozat, ha az $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_2 = -1$, $a_1 + a_2 = -1$ egyenlőségekből legalább egy bekövetkezik.