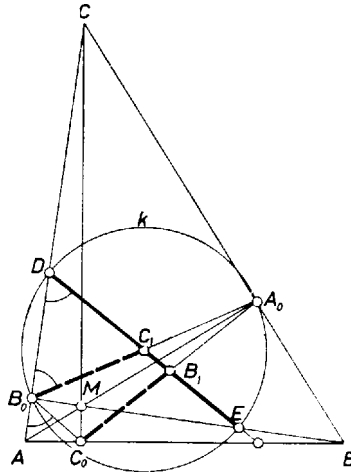


1. Ismeretes, hogy hegyesszögű háromszögben a talpponti háromszög belső szögfelezői rendre azonosak az eredeti háromszög magasságvonalaival. (Ez következik például abból, hogy a háromszög magasságpontját M -mel jelölve,

$$AB_0C_0 \triangleleft = AMC_0 \triangleleft = A_0MC \triangleleft = A_0B_0C \triangleleft,$$

mert a középső két szöget ugyanaz a két egyenes határozza meg, az első és utolsó egyenlőség pedig abból következik, hogy az AM , illetve CM szakasz a B_0 , C_0 , illetve A_0 , B_0 pontokból derékszög alatt látszik, tehát A_0 , B_0 , M , C_0 , illetve A_0 , C , B_0 , M egy-egy körön vannak.)



Rajzoljuk meg az A_0B_0 szakasz feletti k Thalész-kört (középpontja C_1). A C pont ebben nincs benne, mert C -ből A_0B_0 hegyesszög alatt látszik. Emiatt k metszi a B_0C szakaszt, jelöljük a metszéspontot D -vel. Így a B_0C_1D háromszögben $B_0C_1 = DC_1$ és a C_1DB_0 és DB_0C_1 szögek egyenlők. Az utóbbi viszont – mint láttuk – egyenlő a C_0B_0A szöggel. Egyező ezeknek a szögeknek a forgási iránya is (az ábrán mindegyiké megegyezik az óramutató járásával), tehát C_1D párhuzamos B_0C_0 -lal, és így átmegy B_1 -en.

Ezzel tulajdonképpen azt láttuk be, hogy a B_1C_1 egyenest a C_1 -től épp az A_0B_0 szakasz felével kell meghosszabbítani, hogy az ABC háromszög határára – jelen esetben az AC szakaszra – érjünk.

Eddigi megfontolásainkat elmondhatjuk betűk nélkül is: azt kaptuk, hogy egy hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének bármelyik középvonalát a talpponti háromszög bármelyik felezett oldalán túl épp az illető oldal felével kell megtoldani, hogy az eredeti háromszög határára jussunk. Ha tehát egy középvonalat mindkét irányban megtoldunk, akkor a teljes szakasznak a részei – azaz a középvonal egyeneséből az eredeti háromszögbe eső darabnak a részei – rendre egyenlők a talpponti háromszög egy-egy oldalának a felével, és a teljes szakasz hossza egyenlő a talpponti háromszög félkerületével. Ezzel a feladat állításának a bizonyításán túl azt is meghatároztuk, mekkorák a szóban forgó szakaszok.

2. Rátérünk a feladat kérdésének a vizsgálatára. Jelöljük egy tetszőleges tompaszögű háromszög tompaszögénél levő csúcsát, M -mel, a másik két csúcsot A -val és B -vel, a háromszög magasságpontját C -vel. Ekkor az ABC háromszög hegyesszögű, és a talpponti háromszöge azonos ABM talpponti háromszögével. Jelöljük ennek a csúcsait továbbra is A_0 -lal, B_0 -lal, C_0 -lal, az $A_0B_0C_0$ háromszög oldalfelező pontjait rendre A_1 -gyel, B_1 -gyel, C_1 -gyel, az A_0B_0 feletti Thalész-kört k -val.

Mivel az A_0B_0 szakasz M -ből tompaszög alatt, B -ből pedig hegyesszög alatt látszik, azért M a k belsejében, B pedig a k -n kívül van, tehát k metszi a BM szakaszt, jelöljük a metszéspontot E -vel. Ez a már használt D -vel szemközti pontja k -nak, mert $B_0B \perp B_0C$, emiatt E is rajta van a B_1C_1 egyenesen. Ha tehát egy hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének a középvonalára visszafelé mérjük fel az oldal felét, az eredeti háromszög magasságvonala jutunk. (Ez így egy kicsit pontatlan: hogy melyik magasságvonala, az abból határozható meg, hogy a választott középvonal, a felmért oldal és a magasságvonala az eredeti háromszög különböző csúcsaihoz tartozik.)

Ezek szerint a C_1B_1 félegyenesre az A_0B_0 oldal felét mérve a BB_0 magasságvonala jutunk, a B_1 -en túli meghosszabbításra pedig az A_0C_0 felét mérve az AB oldalra jutunk, tehát a B_1C_1 egyenesnek az ABM háromszögbe eső szakasza egyenlő $\frac{1}{2}(A_0C_0 + C_0B_0 - B_0A_0)$ -lal. Hasonlóan látható, hogy ennyivel egyenlők az A_1B_1 , A_1C_1 egyenesek ABM -beli szakaszai is, tehát a feladat eredeti állítása tompaszögű háromszögre változtatás nélkül igaz, csak az általunk a szakaszok közös értékéről adott kiegészítést kell módosítani.