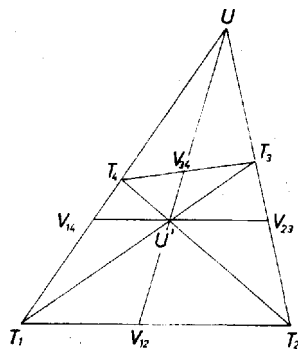


I. megoldás. 1. Bebonyítjuk a következő segédtelet: A tetszőleges $T_1T_2T_3T_4$ négyszög T_2T_3 és T_4T_1 oldalegyenesei messék egymást egy U pontban, T_1T_3 és T_2T_4 átlói egy U' -ben, így T_3T_4 akkor és csak akkor párhuzamos T_1T_2 -vel, ha az UU' egyenes felezi a T_1T_2 oldalt.

Húzzunk párhuzamost U' -n át a T_1T_2 oldallal, jelöljük a T_1T_4 és a T_2T_3 oldallal való metszéspontját V_{14} -gyel, ill. V_{23} -mal, az UU' egyenesnek a T_1T_2 és a T_3T_4 oldallal való metszéspontját V_{12} -vel, ill. V_{34} -gyel (1. ábra).



1. ábra

Ekkor az U , T_4 , T_3 csúcsú szögek szárait átmetsző párhuzamosok alapján mindenestre

$$(1) \quad \frac{U'V_{14}}{V_{12}T_1} = \frac{U'U}{V_{12}U} = \frac{U'V_{23}}{V_{12}T_2},$$

$$(2) \quad \frac{T_2T_1}{U'V_{14}} = \frac{T_1T_4}{V_{14}T_4},$$

$$(3) \quad \frac{T_1T_2}{U'V_{23}} = \frac{T_2T_3}{V_{23}T_3}.$$

Ha most még $T_1T_2 \parallel T_3T_4$ is fennáll, akkor (2) és (3) jobb oldalai egyenlők, ezért a bal oldalak nevezői is egyenlők: $U'V_{14} = U'V_{23}$, így az (1)-beli szélső törtek nevezői is egyenlők, V_{12} felezi T_1T_2 -t, ami állításunk első része (és ekkor persze V_{34} is felezi T_3T_4 -t, U' felezi $V_{14}V_{23}$ -at).

Ha viszont, a $V_{12}T_1 = V_{12}T_2$ egyenlőséget tesszük föl, akkor az (1)-beli első és utolsó számláló is egyenlő, ezért (2) és (3) bal oldalai is egyenlők, ezért jobb oldaluk egyenlőségét fölhasználva

$$\frac{T_2T_4}{U'T_4} = \frac{T_1T_4}{V_{14}T_4} = \frac{T_2T_3}{V_{23}T_3} = \frac{T_1T_3}{U'T_3},$$

a szélső arányokból 1-et – 1-et levonva

$$\frac{T_2U'}{U'T_4} = \frac{T_1U'}{U'T_3},$$

tehát $T_1T_2 \parallel T_3T_4$; ezzel segédteletünk második részét is bebonyítottuk.

2. Jelölje feladatunkban E és G az SO egyenesnek rendre az AB -n, CD -n levő pontját, F és H az AB -vel O -n át húzott párhuzamosnak rendre az AD -n, BC -n levő pontját, jelöljük továbbá az EH , FG egyenespár metszéspontját J -vel, az EF , GH párét K -val. Ekkor segédteletünk első része szerint E felezi AB -t, továbbá O az FH -t, G a CD -t felezi, hiszen föltevés szerint $AB \parallel CD \parallel FH$. Így pedig segédteletünk második részét az $FHJK$ négyszögre alkalmazva $KJ \parallel FH \parallel AB$, hiszen e négyszögben a két átló metszéspontja G , a KF , JH oldalegyenespáré E , az EG egyenes O -ban felezi az FH oldalt.

Ezek szerint ha $AB \parallel CD$ és az S pont létrejön (vagyis $AB \neq CD$), akkor a kérdéses egyenes mindig párhuzamos AB -vel.

Kiss Emil (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

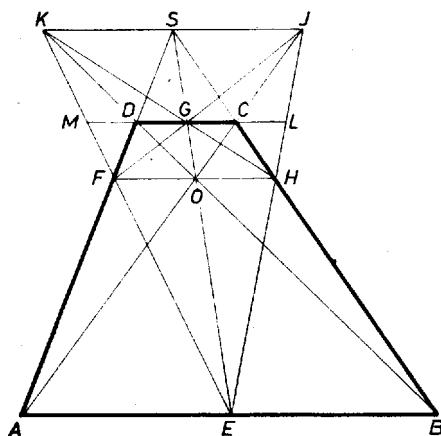
Megjegyzések. 1. Ha segédteletünknek csak az első felét bizonyítjuk („ha $AB \parallel CD$, akkor $EA = EB$, $GD = GC$ és $DF = OH$ ”), akkor megoldásunkat így fejezhetjük be. Messe a CD egyenes EH -t L -ben, EF -et M -ben, ekkor $GL = GM$, és

$$\frac{FJ}{GJ} = \frac{FH}{GJ} = \frac{HF}{GM} = \frac{HK}{GK}, \quad \frac{FJ}{GJ} - 1 = \frac{FG}{GJ} = \frac{HG}{GK},$$

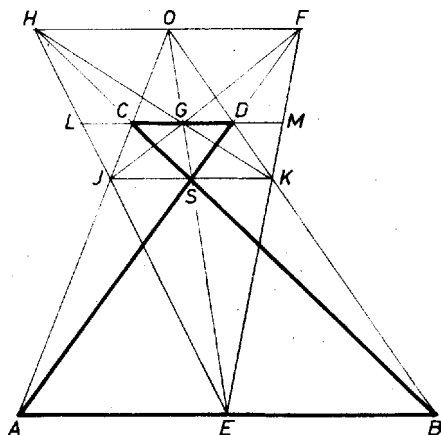
a GFH és GJK háromszögek középpontosan hasonlóak, tehát $JK \parallel FH \parallel AB$. (Tehát lényegében itt bizonyítjuk segédteletünk második részét.)

2. Többek *ismert tétel*ként hivatkoztak a segédtelet első részére. A korábbi tankönyvben valóban szerepelt ez, de a jelenlegiben nem. (Emiatt adtuk bizonyítását már az 1244. gyakorlatban is, K. M. L. 39 (1969) 62. oldal.) Egyébként az $AB = 2 \cdot DC$ esetben O az ABS háromszög súlypontja és SO az AB -hez tartozó súlyvonal.

A segédtételt szemléletesen, így is kimondhatjuk: ha $AB \parallel CD$ és $AB \neq CD$, akkor az $ABCD$ trapéz *ferdén szimmetrikus* a szárai S metszéspontját az átlók O metszéspontjával összekötő egyenesre, 2 megfelelő pont összekötő egyenese párhuzamos AB -vel, és a köztük levő szakaszt az SO egyenes felezi.



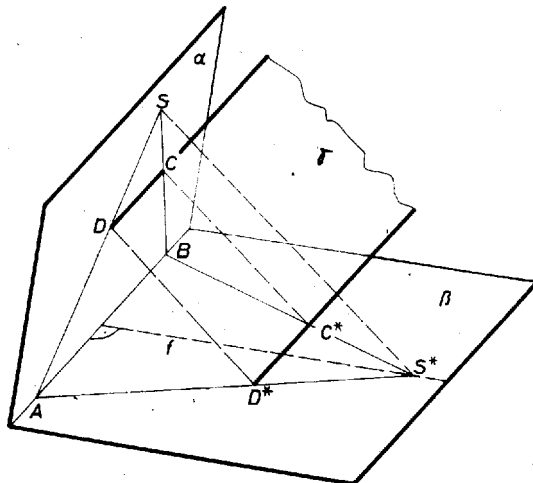
2. ábra



3. ábra

3. Bizonyításunkban a trapéz szárai és átlói nem játszottak egymástól lényegesen különböző szerepet. A bizonyítás érvényes a 3. ábrára is – amelynek kiindulása a 2. ábrától csupán a C és D fölcserélésében különbözik (vagyis itt $ABCD$ hurkolt trapéz). Könnyen adódik az összehasonlításból az a sejtés, hogy a JK -szakasz felezőpontja éppen S , és hogy J, K rajta van az AC , ill. BD átlón; ezek bizonyítását ajánljuk az olvasónak.

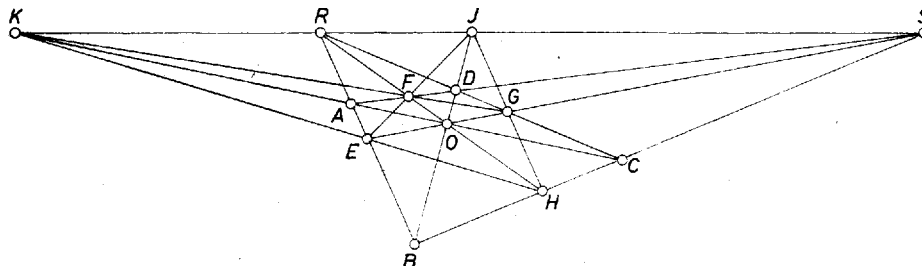
II. megoldás. Ha $ABCD$ szimmetrikus trapéz, akkor az SO egyenes éppen a szimmetriatengely, merőleges az alapokra, az alakzatot előállító pontok egyenesek, is tükrös párokba kapcsolhatók, és így a kérdéses egyenes önmagának a képe, merőleges OS -re, párhuzamos az alappal. Eszerint tüstént készen vagyunk tennivalónkkal, ha találunk olyan transzformációt, amely bármely $ABCD$ trapézt szimmetrikus trapézba visz át (és a további szerkesztő lépéseket meghagyja).



4. ábra

Vegyünk evégett az AB egyenesen át egy, az alakzatunk α síkjától különböző β síkot és benne az AB szakasz felező merőlegesén egy S^* pontot – amely nincs rajta magán az AB szakaszon is – és vetítsük rá alakzatunkat β -ra az SS^* -gal párhuzamos vetítő egyenesek felhasználásával. Mivel így az ABS háromszög képe az ABS^* egyenlő szárú háromszög, elég azt belátnunk, hogy a CD egyenes C^*D^* képe párhuzamos AB -vel. Valóban, a CC^* , DD^* párhuzamos vetítő egyenesek gamma síkja α -t CD -ben, β -t C^*D^* -ban metszi, és ha AB -nek és C^*D^* -nak volna egy közös X pontja, ez α , β , γ mindegyikében benne volna, tehát AB -nek és CD -nek közös pontja lenne, amit kizártunk. Így pedig a C^*D^* egyenes az ABS^* egyenlő szárú háromszögből szimmetrikus trapézt metsz le. Most már $J^*K^* \parallel AB$, J^*K^* visszavetítése α -ra a JK egyenes, és ez ugyanúgy párhuzamos AB -vel, amint azt C^*D^* -ról láttuk. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

(Három egyező – tehát nem versenyszerű – dolgozat ötlete alapján; egyébként kidolgozásuk egyformán hibás is.)



5. ábra

Megjegyzés. Ha A, B, C, D négy pont, semelyik három sincs egy egyenesen, az AC és BD , az AD és BC , az AB és CD egyenespár metszéspontja rendre O, S , ill. R , az OS egyenes közös pontja AB -vel és CD -vel E , ill. G , az OR egyenesé AD -vel, BC -vel F , ill. H , akkor az EF, GH és az EH, FG egyenespárok J, K metszéspontjai által meghatározott egyenes azonos az RS egyenessel (5. ábra). Ezt az állítást az ún. projektív geometriában egyszerűen bizonyítják. Az ábra mindegyik egyenesén a megbetűzött 4 pont ún. harmonikus pontnégyest alkot, az általuk meghatározott szakaszok közül kettő-kettőnek az aránya egyenlő, pl. $AE : BE = AR : BR$ (és így persze $AE : AR = BE : BR$). Az érdeklődőknek ajánljuk Vigassy Lajos következő Középiskolai Szakköri Füzetait: Geometriai transzformációk; Projektív geometria.