

a) $n = 1$ esetére az állítást annak a meglátása igazolja, hogy a hatványozandó $(3 - \sqrt{7})$ alapban $(-\sqrt{7})$ együtt-hatója, $B_1 = 1$ is és a másik tag, $A_1 = 3$ is természetes szám.

$n = 2$ esetén $(3 - \sqrt{7})^2 = 16 - 6\sqrt{7}$, tehát $B_2 = 6$ és $A_2 = 16$, az állítás igaz. $n = 3$ esetében

$$\begin{aligned}(3 - \sqrt{7})^3 &= (3 - \sqrt{7})^2(3 - \sqrt{7}) = (A_2 - B_2\sqrt{7})(A_1 - B_1\sqrt{7}) = \\ &= (A_1A_2 + 7B_1B_2) - (A_1B_2 + A_2B_1)\sqrt{7},\end{aligned}$$

és mindkét zárójelben természetes szám áll, mert természetes számok szorzata és összege természetes szám.

Hasonlóan abból a feltételezésből, hogy az állítás igaz, ha n helyére egy bizonyos k természetes számot írunk:

$$(3 - \sqrt{7})^k = A_k - B_k\sqrt{7}, \text{ ahol } A_k, B_k \text{ természetes számok,}$$

következik, hogy az állítás igaz a k -ra következő $(k + 1)$ természetes számra is, mert a

$$\begin{aligned}(3 - \sqrt{7})^{k+1} &= (3 - \sqrt{7})^k(3 - \sqrt{7}) = (A_k - B_k\sqrt{7})(A_1 - B_1\sqrt{7}) = \\ &= (A_1A_k + 7B_1B_k) - (A_1B_k + A_kB_1)\sqrt{7}\end{aligned}$$

számításból kapott

$$(2) \quad A_{k+1} = A_1A_k + 7B_1B_k \quad \text{és} \quad B_{k+1} = A_1B_k + A_kB_1$$

együtthatók szintén természetes számok. Eszerint az állítás igaz $n = 1, 2, 3, \dots$ -ra, minden természetes számra.

b) (1)-et B_n -nel osztva

$$(3) \quad \frac{A_n}{B_n} - \sqrt{7} = \frac{(3 - \sqrt{7})^n}{B_n},$$

és itt n növelésével a számláló csökken, hiszen alapjára fennáll: $0 < 3 - \sqrt{7} < 1$, a nevező viszont növekszik, hiszen (2) szerint $B_n > B_{n-1}$, tehát A_n/B_n és $\sqrt{7}$ eltérése csökken, ha n -et növeljük. Azt is látjuk, hogy a hányados felülről közeledik $\sqrt{7}$ -hez, mert különbségük minden n -re pozitív.

A hibának $10^{-4} = 1/10^4$ alá csökkentése végett vegyük észre, hogy

$$3 - \sqrt{7} < \frac{3}{8}, \text{ ugyanis } \sqrt{7} > 3 - \frac{3}{8} = \frac{21}{8}, \text{ hiszen } 7 \cdot 8^2 > 21^2,$$

másrészt (2) második kifejezése alapján

$$B_n > A_1B_{n-1} = 3B_{n-1} > 3A_1B_{n-2} = 3^2B_{n-2} > \dots > 3^{n-1}B_1 = 3^{n-1}.$$

Így a kívánt pontossághoz elég teljesíteni a következőt:

$$\frac{A_n}{B_n} - \sqrt{7} < \frac{(3/8)^n}{3^{n-1}} = \frac{3}{8^n} < \frac{1}{10^4}$$

(a (3)-beli számlálót növeltük, a nevezőt csökkentettük; ha az így növelt érték kisebb a korlátnál, akkor a becsült hiba is kisebb nála), vagyis olyan n -et keresni, amelyre

$$8^n > 3 \cdot 10^4, \quad \text{azaz } 2^{3n} > 30\,000.$$

Mivel $2^5 = 32$ és $2^{10} = 32^2 = 1024 > 1000$, tehát $2^{15} > 32\,000$, azért a legutóbbi követelménynek megfelel minden olyan kitevő, melyre $3n \geq 15$, vagyis amelyre $n \geq 5$.

Megjegyzések. 1. Sokan kiszámították, hogy megfelelő kitevő már az $n = 4$ is, már az $A_4/B_4 = 508/192$ hányados is 10^{-4} -nél kisebb hibával közelíti meg $\sqrt{7}$ -et. Ehhez az összehasonlításhoz azonban magát $\sqrt{7}$ -et számították ki legalább 5 tizedes jegyre. Ez a kérdés lényegének a meg nem értését mutatja, de a „pontos számításokhoz” szokott tanulók részéről nem hibáztatható.

A hibaszámítás lényege éppen az, hogy egy aránylag nehezebben kiszámítható mennyiségre egy közelítő érték pontosságát (hibáját) anélkül becsüljük meg, hogy a vizsgált mennyiség pontos értékét felhasználnánk. Ez utóbbi esetben ugyanis a közelítés értelmét vesztené: ha ismerjük a vizsgált mennyiség pontos értékét (vagy legalább is a használt közelítésnél pontosabb értékét), akkor nincs szükség közelítő értékre.

2. Próbálja meg az érdeklődő olvasó a kívánt n kitevő megbecslését a $3 - \sqrt{7} < 1/2$ és $B_n > 4B_{n-1}$, $B_n > 16B_{n-2}$ becslések alapján végezni, az utóbbit persze előbb igazolnia kell. Ez is arra vezet, hogy egyetlen számnak – a 2-nek – kell egy bizonyos korlátnál nagyobb hatványát keresni.