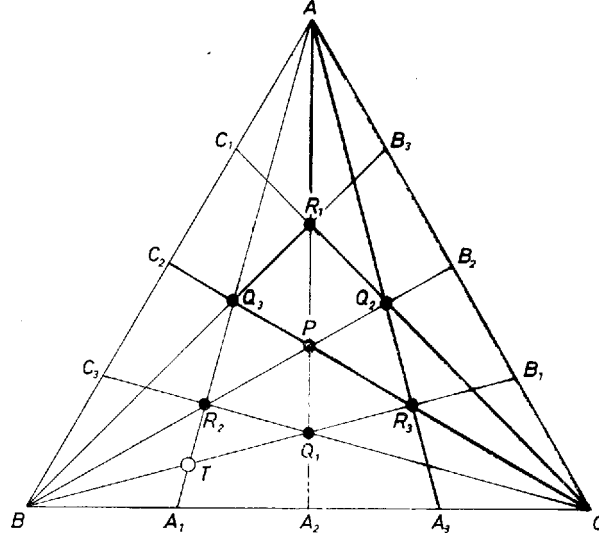


1. Megmutatjuk, hogy az adott $ABC = H$ szabályos háromszög belsejében kétféleképpen lehet kijelölni a feladat első mondata szerinti három pontot. Ebből mindjárt adódik a kérdés magyarázatául, hogy a két tanuló a két különböző ponthármasbeli távolságokat adta meg; csak azt kell majd még belátnunk, hogy a két ponthármas által meghatározott távolságok különböznek egymástól.

Rajzoljuk meg a BAC , CBA , ACB szöget negyedelő egyeneseket és jelöljük a szemben levő BC , CA , AB oldallal való metszéspontokat az A , B , C forgási irány szerint rendre A_i -vel, B_i -vel, C_i vel ($i = 1, 2, 3$).



A keresett ponthármas pontjait a H csúcsaival összekötő egyenesek csak e 9 egyenes közül valók lehetnek, tehát csak olyan pontok jöhetnek szóba, amelyeken három ilyen szögnegyedelő megy át. Vannak ilyen pontok, hiszen AA_2 , BB_2 , CC_2 a H szimmetriatengelyei és mindegyik tengelyre vonatkozóan a többi negyedelők tükrös párokat alkotnak, és így a tengelyen metszik egymást. Az AA_2 tengelyen van a BB_1 , CC_3 pár, a BB_2 , CC_2 pár és a BB_3 , CC_1 pár metszéspontja, jelöljük ezeket rendre Q_1 -gyel, P -vel, R_1 -gyel. Hasonlóan kapjuk a BB_2 tengelyen a Q_2 , P , R_2 és a CC_2 -n a Q_3 , P , R_3 a hármas metszéspontokat.

E 7 ponttal felsoroltuk a szögnegyedelők összes hármas metszéspontját. Elég belátni ehhez a szimmetriák alapján azt, hogy valamelyik szélső negyedelőn, pl. AA_1 -en nincs további hármas metszéspont. A rajta eddig megállapított R_2 -t és Q_3 -at B -vel összekötő egyenes a BB_2 , ill. BB_3 , így a B -ből induló negyedelők közül már csak a BB_1 -gyel való T metszéspontja jöhet szóba. Ez azonban BB_1 -nek az AB és AA_2 közti BQ_1 , szakaszán van mint belső pont, ezért $BCT < BCQ_1 < 15^\circ$, tehát T -n nem megy át negyedelője az ACB szögnek; ezt akartuk belátni.

A talált 7 hármas metszéspont mindegyike rajta van a H valamelyik tengelyén, P pedig mind a három tengelyen rajta van. Így P semelyik Q_i -vel vagy R_i -vel ($i = 1, 2, 3$) nem tartozhat egy, a feladat szerinti ponthármasba, különben a ponthármas A -val, B -vel, C -vel összekötve nem kapnánk meg H -nak mind a 9 szögnegyedelőjét, pl. ha P a Q_1 -gyel tartozna egy ponthármasba, akkor vagy AA_1 -et vagy AA_3 -at nem kapnánk meg.

Hasonlóan adódik, hogy Q_1 nem tartozhat egy ponthármasba sem R_1 -gyel (AA_2 miatt), sem R_2 -vel, sem R_3 -mal (CC_3 , ill. BB_1 miatt). A Q_1 , Q_2 , $Q_3 = H_q$ ponthármas viszont előállítja H -nak mind a 9 szögnegyedelőjét. Ugyanígy kapjuk az R_1 , R_2 , $R_3 = H_r$ hármas és azt, hogy több megfelelő ponthármas nem állítható össze a 7 hármas metszéspont közül. Ezzel a megoldás elején kimondott állítást bebizonyítottuk. A H -nak P körüli 120° -os forgási szimmetriájából az is következik, hogy mind a H_q , mind a H_r ponthármasok egy-egy szabályos háromszög csúcsai.

2. Áttérve az előre jelzett számításra, a H_q , H_r szabályos háromszögeknek csak egy oldalát kell kiszámítanunk. Ezek egyenlők a körjük írt kör PQ_1 , ill. PR_1 sugarának $\sqrt{3}$ -szorosával.

PQ_1 , a PBA_2 derékszögű háromszögben a B -nél levő szög felezőjével kettévágott PA_2 oldalnak része, és e háromszög oldalai $BA_2 = 1/2$, $A_2P = AA_2/3 = \sqrt{3}/6$ és $PB = 2AA_2/3 = \sqrt{3}/3$. Ezért

$$PQ_1 : Q_1A_2 = PB : A_2B,$$

$$PQ_1 : (PQ_1 + Q_1A_2) = PQ_1 : PA_2 = PB : (PB + A_2B),$$

$$PQ_1 = PA_2 \frac{PB}{PB + A_2B} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.$$

BCR_1 a szerkesztés szerint egyenlő szárú derékszögű háromszög, így

$$PR_1 = A_2R_1 - A_2P = BA_2 - A_2P = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Ezekből az előre bocsátottak alapján

$$Q_1Q_2 = \sqrt{3} \cdot PQ_1 = 2 - \sqrt{3} (= 0,268),$$

$$R_1R_2 = \sqrt{3} \cdot PR_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} (= 0,366),$$

és eredményeink igazolják a megoldás elején a kérdés magyarázatára közölt elgondolásunkat.

Megjegyzés. Ha a feladat nem kérdezte volna a lehetséges számeredményeket, akkor a 2. pont helyett elég lett volna ezt mondanunk: H_q és H_r háromszögek oldalainak aránya a nyilvánvalóan hasonló AQ_3Q_2 és AR_2R_3 háromszögekből

$$\frac{Q_3Q_2}{R_2R_3} = \frac{AQ_3}{AR_2} < 1,$$

mert Q_3 benne van az ABP háromszögben, AQ_3 része az AR_2 -nek, tehát $Q_3Q_2 \neq R_2R_3$.