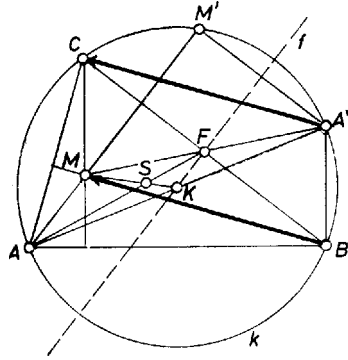


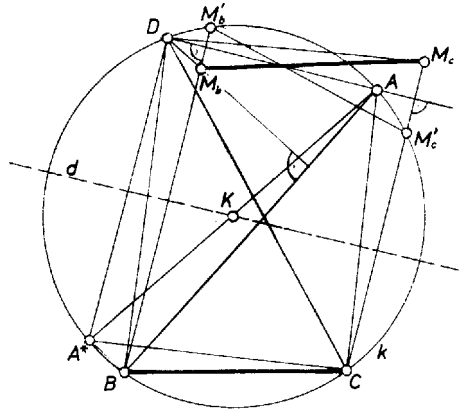
I. megoldás. Tükrözzük az ABC háromszög B és C csúcsán átmenő magasságvonalait a BC oldal F felezőpontjára (1. ábra).



1. ábra

A kapott egyenesek metszéspontja az ABC háromszög M magasságpontjának F -re vonatkozó tükrösképe, jelöljük ezt a pontot A^* -gal. Mivel A^* az AB egyenesre B -ben, és az AC egyenesre C -ben emelt merőlegesek metszéspontja, azért a B és C pontok rajta vannak az AA^* szakasz feletti k Thalész-körön, vagyis k az ABC háromszög köré írható kör, és A^* az A pont k -beli átellenes pontja. Az F -re való tükrözés a $\overrightarrow{BM}$ vektort a $\overrightarrow{CA^*}$ vektorba viszi át, így ezek a vektorok egymás (-1) -szeresei, tehát $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{A^*C}$.

Legyen D a k kör tetszőleges, az A, B, C pontoktól különböző pontja (2. ábra).



2. ábra

Alkalmazzuk eredményüket az ADB háromszög M_b magasságpontjára: $\overrightarrow{BM_b} = \overrightarrow{A^*D}$, és az ADC háromszög M_c magasságpontjára: $\overrightarrow{CM_c} = \overrightarrow{A^*D}$. Így $\overrightarrow{BM_b} = \overrightarrow{CM_c} = \overrightarrow{A^*D}$, eszerint az M_bM_c szakasz a BC szakasznak az A^*D vektorral való eltolásból ered, tehát az M_bM_c egyenes párhuzamos BC -vel.

Az M_bM_c egyenes mindig határozott, hiszen M_b és M_c távolsága egyenlő B és C távolságával.

Nem használtuk fel, hogy D a körülírt kör BC -re merőleges átmérőjének végpontja, eszerint az állítás k minden pontjára érvényes, kivéve az ABC háromszög csúcsait (hiszen úgy az ADB , ADC háromszögek közül legalább az egyik nem lenne valóságos háromszög). Ha D az A -val átellenes A^* pont, akkor az ADB háromszögben B -nél, az ADC háromszögben C -nél derékszög van, M_b azonos B -vel, M_c azonos C -vel (az A^*D eltolási vektor 0 vektor).

Hasenfratz Anna (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. A fenti megoldás szerint

$$\overrightarrow{MA^*} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC},$$

így az AA^* szakasz K felezőpontjára (1. ábra)

$$\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA^*}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).$$

Mivel AA^* az ABC háromszög köré írható kör átmérője, azért K a k középpontja.

Ismeretes másrészt, hogy a háromszög S súlypontjára

$$\overrightarrow{MS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$$

teljesül (ahol M helyébe a sík tetszőleges pontját írhatnánk), tehát

$$\overrightarrow{MS} = \frac{2}{3} \overrightarrow{MK},$$

vagyis S a KM szakasz K -hoz közelebbi harmadolópontja. Ez *Euler* tétele. Feladatunk állítása ennek a tételnek a segítségével is bizonyítható (ismét k tetszőleges D pontjára): legyen S_b és S_c rendre az ADB , ADC háromszög súlypontja, Euler tétele alapján könnyen látható, hogy $S_b S_c \parallel M_b M_c$, az viszont közvetlenül bizonyítható, hogy $S_b S_c \parallel BC$.

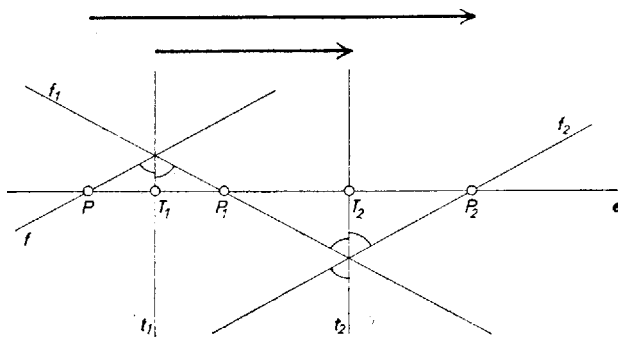
Rózsás László (Nagykőrös, Arany J. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Az előző megoldásban beláttuk, hogy az ABC háromszög M magasságpontjának a BC oldal F felezőpontjára vonatkozó tükörképe azonos az ABC köré írható k kör A -n átmenő átmérőjének másik végpontjával, A^* -gal. Ebből következik, hogy M -nek BC -re vonatkozó M' tükörképe is rajta van k -n (1. ábra). Valóban, ha M' -t tükrözzük a BC szakasz f felező merőlegesére, M -nek F -re (a két tükrözési tengely metszéspontjára) vonatkozó A^* tükörképét kapjuk, tehát M' és A^* tükörök a k kör f átmérőjére, így M' is rajta van k -n.

Eszerint az ADB , ADC háromszögek M_b , M_c magasságpontjainak AD -re vonatkozó M'_b , M'_c tükörképei is rajta vannak k -n (2. ábra).

Így BM'_b is, CM'_c is merőleges AD -re – hiszen pl. BM_b is, $M_b M'_b$ is merőleges rá –, ezért BM'_b és CM'_c egy, a k -ba beírt húrtrapéz alapjai, tehát ennek $M'_b M'_c$ szára (esetleg átlója) a BC szárnak tükörképe a kör BM'_b -re merőleges – tehát AD -vel párhuzamos – d átmérőjére. Eszerint $M_b M_c$ úgy áll elő BC -ből, hogy ezt előbb d -re, majd a képét AD -re tükrözzük. Ámde két, egymással párhuzamos tengelyen való tükrözés eredménye előáll egyetlen eltolással, amely merőleges a két tengelyre és vektora 2-szer akkora, mint az első tengelyt a második tengelybe vivő eltolás. Így tehát $M_b M_c \parallel BC$, ezt kellett bizonyítanunk.

Bebizonyítjuk a felhasznált állítást. Legyen a két párhuzamos tengely t_1 és t_2 , továbbá P képe t_1 -re P_1 , és P_1 képe t_2 -re P_2 (3. ábra).



3. ábra

Ekkor a $PP_1 = e$ egyenes merőleges t_1 -re és átmegy P_2 -n, mert $P_1 P_2$ merőleges t_2 -re, tehát t_1 -re is. Legyen e metszéspontja t_1 -gyel T_1 , t_2 -vel T_2 . Ekkor P_2 úgy is előáll, hogy P -t előbb T_1 -re tükrözzük, a kép nyilvánvalóan P_1 , és ugyanígy P_1 képe T_2 -re P_2 . Tudjuk viszont,¹ hogy két pontra egymás után való tükrözés helyettesíthető kétszer akkora eltolással, mint amekkora az első pontot (T_1 -et) a másodikba (T_2 -be) viszi át. Az pedig már nyilvánvaló, hogy t_1 -et t_2 -be – mindkettőre merőlegesen – ugyanakkora eltolás viszi át, mint T_1 -et T_2 -be. (Az ábra bemutatja egy, a P -n átmenő és a t_1 -et metsző f egyenes f_1 , majd f_2 képét is, $f_2 \parallel f$, és f bármely pontját $2T_1 T_2$ eltolás viszi át f_2 megfelelő pontjába.

Ez a bizonyítás is érvényes D -ként k -nak bármely pontjára.

Megjegyzés. Bár több érdekes megoldás érkezett annak a föltevésnek a felhasználásával is, amit D helyzetére az eredeti kitűzés tartalmazott, ilyet mégsem közlünk, mert egy ilyen megoldás, a speciális helyzet kihasználásával, csak bonyolultabb lehet, mint anélkül.

¹ Lásd: Horvay Katalin-Pálmay Lóránt: Matematika a gimnázium I. osztálya számára. 4. kiadás. Tankönyvkiadó. Budapest, 1969. 323. oldal.