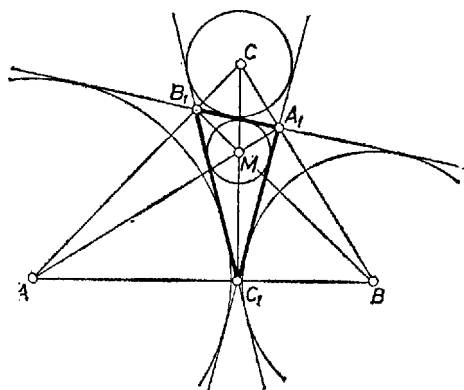


Jelöljük az $ABC = H$ háromszög magasságpontját M -mel, az AB_1C_1 , a BC_1A_1 és CA_1B_1 háromszög adott magasságpontját pedig rendre A_2 -vel, B_2 -vel, C_2 -vel.

1. Ha H -ban a C csúcsot M -re cseréljük, az új, ABM háromszög talpponti háromszöge ismét $A_1B_1C_1$ lesz, hiszen M -nek és C -nek AB -n levő vetülete azonos, és $AB_1 \perp BM$, $BA_1 \perp AM$ alapján az A és B csúcsoknak a szemközti oldalon levő vetülete B_1 , illetve A_1 lesz. (1. ábra).



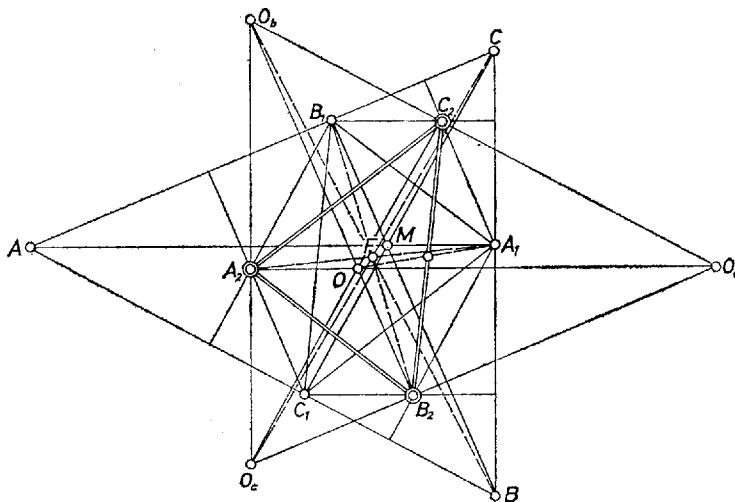
1. ábra

A mondottakból az is következik, hogy az ABM háromszög magasságpontja C . Kivétel csak az az eset, ha H -ban A -nál vagy B -nél derékszög van, hiszen ekkor az A , B , M pontok nem határoznak meg háromszöget. Ha viszont H nem derékszögű, akkor az A , B , C , M pontok különbözők, és bárhogy választunk ki e négy pont közül hármat, az ezek által alkotott háromszög magasságpontja a negyedik, és e háromszög talpponti háromszögének a helyzete nem függ attól, melyik három pontot választottuk az A , B , C , M közül. (A 3 talppont szerepe azonban cserélődik.) Ha H hegyesszögű, akkor az ABM , BCM , CAM háromszögekben M -nél tompaszög van – pl. $\angle AMB < 180^\circ - \angle ACB < \pi$, ha pedig H -ban valamelyik csúcsnál tompaszög van, akkor azt M -re cserélve hegyesszögű háromszöget kapunk.

Ha H hegyesszögű háromszög, akkor magasságvonalai az $A_1B_1C_1 = H_1$ talpponti háromszögben szögfelező egyenesek, hiszen a kerületi szögek és a merőleges szárú szögek tételei alapján például A_1 -ben: $\angle AA_1C_1 < \angle ACC_1 < \angle ABB_1 < \angle AA_1B_1 < \angle ABB_1 < \angle AA_1B_1 < \angle ABB_1$; ennél fogva H oldalai pedig H_1 -nek külső szögfelezői. Ha H -ban – mondjuk C -nél – tompaszög van, akkor az ABM háromszög hegyesszögű, tehát ennek a magasságvonalai lesznek H_1 belső szögfelezői, vagyis H_1 -re nézve az AC , BC oldal belső, az AB pedig külső szögfelező. Ezek szerint ha H nem derékszögű, akkor az A_1 , B_1 , C_1 , M pontok különbözők, nincs köztük három egy egyenesen levő pont, és M a H_1 háromszög oldalegyeneseit érintő valamelyik kör középpontja, H csúcsai pedig a másik három érintőkör középpontjai.

2. Az AB_1C_1 háromszög A -ban összefutó oldalai a H -ban is oldalak, ezért A_2 magasságpontja a B_1 -en át CC_1 -gyel, C_1 -en át BB_1 -gyel párhuzamosan húzott egyenesek metszéspontja, tehát B_1A_2 párhuzamos és egyenlő MC_1 -gyel, ugyanígy $C_1A_2 \parallel MB_1$, másképpen mondva: az $\vec{MA_2}$ vektor az $\vec{MB_1}$, $\vec{MC_1}$ vektorok összege (2. ábra):

$$\vec{MA_2} = \vec{MB_1} + \vec{MC_1}.$$



2. ábra

Hasonlóan

$$\overrightarrow{MB_2} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MC_1}, \quad \text{és} \quad \overrightarrow{MC_2} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1}.$$

Mérjük fel M -ből kiindulva az $(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1})$ vektort, legyen a végpontja O , az MO szakasz felezőpontja pedig F . Ekkor

$$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2}),$$

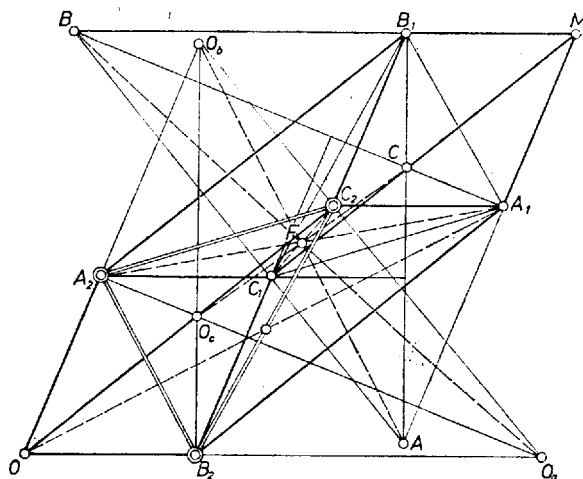
tehát F az A_1A_2 szakasz felezőpontja, és hasonlóan mutatható meg, hogy F a B_1B_2 , C_1C_2 szakaszokat is felezi.

Ezek szerint az $A_2B_2C_2 = H_2$ háromszög az F pontra vonatkozó tükörképe a H_1 -nek, és O az M tükörképe. Ezek alapján O a H_2 oldalegyeneseit érintő 4 kör valamelyikének a középpontja, H csúcsainak az F -re vonatkozó tükörképe pedig H_2 további három érintőkörének a középpontja. A centrális szimmetriából az is következik, hogy F a H_2 háromszögből ugyanúgy állítható elő, mint H_1 -ből:

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2}).$$

3. Ezek szerint ha az A_2 , B_2 , C_2 pontok különbözők (és nincsenek egy egyenesen), akkor a szerkesztés menete a következő. Megrajzoljuk az $A_2B_2C_2$ háromszög belső és külső szögfelezőit, a kapott négy metszéspont közül egyiket O -nak választjuk, a másik három közül az OA_2 , OB_2 , OC_2 egyeneseken levőt pedig rendre O_a -val, O_b -vel, O_c -vel jelöljük. Majd tükrözzük O -t a B_2C_2 szakasz felezőpontjára, kapjuk az A_1 pontot; az A_1A_2 szakaszt megfelezzük, kapjuk az F pontot. Végül az $O_aO_bO_c$ háromszöget F -re tükrözve kapjuk a keresett ABC háromszöget.

4. Ezzel az eljárással négy különböző, a követelményeknek megfelelő háromszöget kapunk. (A 2. és 3. ábrán ezek közül egyet–egyet rajzoltunk meg.)¹



3. ábra

Valóban, a szerkesztés szerint az $O_aO_bO_c$ háromszög talpponti háromszöge $A_2B_2C_2$, magasságpontja O , és

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2}).$$

Legyen a B_2 , C_2 , O pontok F -re vonatkozó tükörképe B_1 , C_1 , M , akkor a tükrözés alapján az ABC háromszög magasságpontja M , és talpponti háromszöge $A_1B_1C_1$, továbbá

$$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1}).$$

Ebből pedig a 2. pontban mondottak szerint következik, hogy az AB_1C_1 , BC_1A_1 , CA_1B_1 háromszögek magasságpontja rendre az adott A_2 , B_2 , C_2 pont.

5. Ha tehát az eredeti H háromszög nem derékszögű, az adott három magasságpont mindig valódi H_2 háromszöget határoz meg, és egy valódi (nem elfajult) H_2 háromszögből négy különböző H háromszöget állíthatunk vissza. (Az „eredeti” H háromszöget csak akkor tudnánk egyértelműen rekonstruálni, ha azt is tudnánk róla, hogy van-e tompaszöge, és ha van, melyik csúcsánál van az. Ehhez hozzáértjük, hogy az adott három pont meg van betűzve, azaz szerepük előre meg van határozva.)

6. Ha H -ban – mondjuk a C csúcsnál – derékszög van, akkor az A_1 , B_1 , M pontok azonosak C -vel, tehát az A_1B_1C háromszög három csúcsa azonos. Így a C_2 magasságpont nem értelmezhető, H_2 nem jön létre. Az adott magasságpontokból eszerint csak akkor szerkeszthetünk megfelelő háromszöget, ha azok valódi háromszöget határoznak meg.

¹ A két ábrán az A_2 , B_2 , C_2 ponthármas egybevágó, csak az ábrák takarékos beállítása érdekében máshoz képest el vannak fordítva.

(Akkor sem mondhatunk mást, ha $C \equiv A_1 \equiv B_1$ esetén C_2 -t C -vel azonosnak definiáljuk. Ekkor ugyan megengedhető, hogy H_2 két csúcsa – mondjuk A_2 és B_2 – azonos legyen, de ekkor végtelen sok megfelelő H háromszög van, ezek egyik csúcsa a C_2 -vel azonos C , a másik kettőt pedig egy tetszőleges, a C_2 -n átmenő merőleges egyenespár metszheti ki az A_2C_2 -re A_2 -ben emelt merőleges egyenesből.)