

I. megoldás. Egyenletünk x^2 -re vonatkozóan másodfokú, x^2 -re legfőbb két megoldása van, és ha ezek valósak, különböznek és pozitívak, akkor x -re 4 gyököt kapunk, amelyek páronként egyenlő abszolút értékűek. (1) így alakítható:

$$x^4 - \left(\frac{13}{4} + k\right)x^2 + \frac{9}{4}(k+1) = x^4 - \left(\frac{9}{4} + (k+1)\right)x^2 + \frac{9}{4}(k+1) = 0.$$

Észrevéve, hogy $(-x^2)$ együttthatója éppen egyenlő az ismeretlent nem tartalmazó tag két tényezőjének összegével (és hogy x^4 együttthatója 1), leolvasható, hogy x^2 -re a két megoldás $9/4$ és $(k+1)$, tehát az egyenlet:

$$4\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)\{x^2 - (k+1)\} = 0.$$

(Ez az alak adódik természetesen az oldóképlettel is.) Így (1) gyökei $\pm 3/2$ és $\pm\sqrt{k+1}$, amennyiben $k+1 > 0$ és $k+1 \neq 9/4$.

A gyökök növekvő rendben való felsorolása kétféle lehet. Ha $k+1 < 9/4$, akkor $(-3/2)$ és $3/2$ a felsorolás első, ill. negyedik tagja:

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\sqrt{k+1}, \quad x_3 = \sqrt{k+1}, \quad x_4 = \frac{3}{2},$$

és a követelmény akkor és csakis akkor teljesül, ha $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$, azaz

$$(2) \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$

amiből

$$\frac{3}{2} + 3\sqrt{k+1} = 0, \quad k+1 = \frac{1}{4}, \quad k = -\frac{3}{4},$$

ugyanis feltételünk a 3. különbség egyezését is biztosítja:

$$x_4 - x_3 = (-x_1) - (-x_2) = x_2 - x_1 \quad (\text{A talált } k \text{ mellett } k+1 > 0.)$$

Ha pedig $k+1 > 9/4$, akkor $(-3/2)$ és $3/2$ a 2., ill. a 3. helyen áll:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{k+1}, & x_2 &= -\frac{3}{2}, & x_3 &= -x_2, & x_4 &= -x_1, \\ x_1 - 3x_2 &= 0, & x_1 &= 3x_2 = \frac{9}{2}, & k &= \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 1 = \frac{77}{4}. \end{aligned}$$

Ezek szerint k -nak két értéke felel meg: $-3/4$ és $77/4$.

II. megoldás. Az (1) egyenlet gyökeinek a négyzetei gyökei a

$$(2) \quad 4y^2 - (4k+13)y + (9k+9) = 0,$$

másodfokú egyenletnek, a k paraméter értékét tehát úgy kell megválasztanunk, hogy (2)-nek két különböző pozitív gyöke legyen. Jelöljük (2) kisebbik gyökét a -val, nagyobbik gyökét b -vel. Ekkor (1) gyökei nagyság szerint

$$x_1 = -\sqrt{b}, \quad x_2 = -\sqrt{a}, \quad x_3 = -\sqrt{a}, \quad x_4 = \sqrt{b}.$$

Úgy kell megválasztanunk k értékét, hogy $a > 0$ legyen, és

$$(3) \quad x_3 - x_2 = x_4 - x_1$$

teljesüljön (ebből már következik, hogy $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$ is teljesül), vagyis $3\sqrt{a} = \sqrt{b}$, $b = 9a$ legyen. A gyökök és együttthatók közti összefüggés szerint ekkor a (2) egyenlet együttthatóira

$$\begin{aligned} 4k+13 &= 4(a+9a), \\ 9k+9 &= 4 \cdot 9a^2 \end{aligned}$$

teljesül. A második szerint $k = 4a^2 - 1$, ezt az elsőbe helyettesítve a -ra a

$$16a^2 + 9 = 40a$$

másodfokú egyenletet kapjuk, melynek gyökei: $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{9}{4}$, így k keresett értékei: $k_1 = -\frac{3}{4}$, $k_2 = \frac{77}{4}$. Mivel az a -ra kapott értékek pozitívak, k ezen értékei eleget tesznek a feladat követelményeinek.