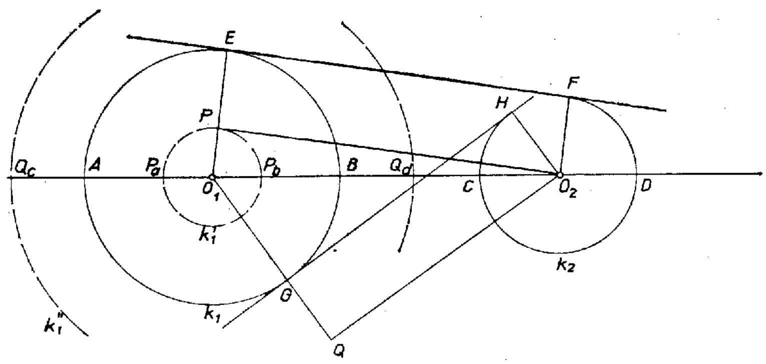
I. megoldás. Legyenek a körök k_1, k_2, középpontjaik rendre O_1, O_2, sugaraik r_1, r_2, ahol $r_1 \geq r_2$, és $O_1O_2 = c$ (1. ábra).



1. ábra

Nyilvánvalóan $c > r_1 + r_2$, tehát A-val a tengely és k_1 első metszéspontját jelölve B is k_1-en van. Legyen E és G is a k_1-en levő pontja a közös érintőnek, továbbá O_2 vetülete O_1E-n P, O_1G-n Q.

O_1 és O_2 az EF külső közös érintőnek ugyanazon a partján van, ezért O_1O_2FE konvex derékszögű trapéz, magassága EF, így $r_1 > r_2$ esetén az O_1O_2P derékszögű háromszögből

$$EF^2 = PO_2^2 = c^2 - (r_1 - r_2)^2 = [c - (r_1 - r_2)][(c + r_1) - r_2] =$$
$$= (c - r_1 + r_2)(AO_2 - CO_2) = (O_2B + O_2D) \cdot AC = AC \cdot BD.$$

Ha pedig $r_1 = r_2$, akkor nyilvánvalóan $EF = O_1O_2 = AC = BD$, a talált összefüggés ekkor is helyes.

A GH belső közös érintőnek viszont két különböző partján van O_1 és O_2, ezért O_1O_2HG hurkolt derékszögű trapéz, és az O_1O_2Q derékszögű háromszögből

$$GH^2 = QO_2^2 = c^2 - O_1Q^2 = c^2 - (r_1 + r_2)^2 =$$
$$= (c + r_1 + r_2)(c - r_1 - r_2) = AD \cdot BC.$$

Ezek szerint EF is, GH is két olyan szakasz mértani középarányosa a szimmetriatengelyen keletkezett szakaszok közül, melyek egyik végpontja k_1-en, a másik pedig k_2-n van. Pontosabban: EF esetében a két szakasz végpontjai az egyező irányú O_1A, O_2C sugárpár és az O_1B, O_2D sugárpár végpontjai – amint O_1E és O_2F is párhuzamos és egyirányú sugarak –, viszont GH esetében a két szakasz végpontjait az ellentétes irányú O_1A és O_2D valamint O_1B és O_2C sugárpár végpontjai adják, – amint O_1G és O_2H is párhuzamosak és ellentétes irányúak.

Csathó Csaba (Esztergom, Bottyán J. Szakközépiskola, I. o. t.)

Megjegyzés. Mondhatjuk azt is, hogy $r_1 \neq r_2$ esetében a körhöz külső pontból húzott érintőszakasz és szelőszakaszok közti összefüggést[1] alkalmaztuk, az első esetben az O_1 körüli $O_1P = r_1 - r_2$ (> 0) sugarú k_1' segédkörre (amelyet a közös külső érintő megszerkesztésében szokás használni) és az O_2 pontra, a második esetben pedig az O_1 körüli $O_1Q = r_1 + r_2$ sugarú k_1'' segédkörre (amelyet a közös belső érintő szerkesztésében szokás használni) és az O_2 pontra. Az ábra jelöléseivel $EF^2 = O_2P^2 = O_2P_a \cdot O_2P_b = CA \cdot DB$, $GH^2 = O_2Q^2 = O_2Q_c \cdot O_2Q_d = DA \cdot CB$, ugyanis CA az O_2P_a szakasznak $\overrightarrow{O_2C}$ vektorral való eltolás útján keletkezett s. í. t.

II. megoldás Felhasználjuk a következő, arány-láncokra vonatkozó összefüggést: ha

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = a_4 : b_4, \tag{1}$$

akkor

$$(a_3 - a_1) : (b_3 - b_1) = (a_4 - a_2) : (b_4 - b_2) \tag{2}$$

Valóban, (2) akkor és csakis akkor igaz, ha

$$(b_3 - b_1)(a_4 - a_2) = (a_3 - a_1)(b_4 - b_2),$$

azaz

$$b_3a_4 - b_3a_2 - b_1a_4 + b_1a_2 = a_3b_4 - a_3b_2 - a_1b_4 + a_1b_2,$$

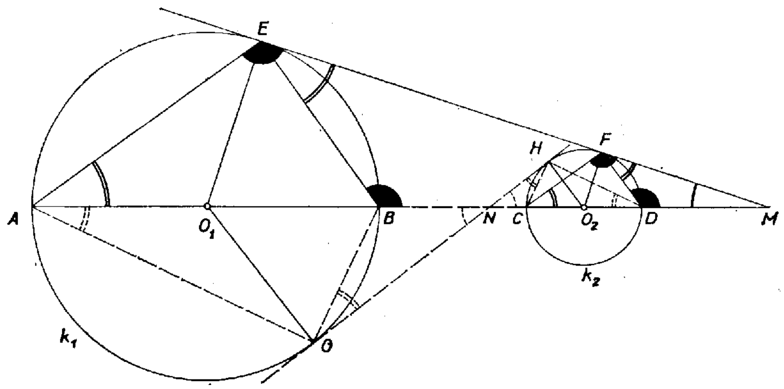
[1] Lásd pl. *Horvay Katalin—Pálmay Lóránt:* Matematika a gimn. II. o. számára. 4. kiadás. Tankönyvkiadó. Budapest. 1970. 175. oldal, 240. feladat. Az érintőszakasz a szelődarabok mértani közepe.

és itt a jobb és a bal oldalon álló tagok (1) miatt rendre egyenlők egymással. Hasonlóan látható be, hogy (1)-ből következik az

$$(a_3 + a_1) : (b_3 + b_1) = (a_4 + a_2) : (b_4 + b_2)$$

összefüggés is.

a) Feltehetjük, hogy EF metszi a AB-t, hiszen különben $EF = AC = BD = \sqrt{AC \cdot BD}$ miatt feladatunk állítása nyilvánvaló. Jelöljük ezt a metszéspontot M-mel és a köröket ismét k_1-gyel, illetve k_2-vel, középpontjaikat O_1-gyel, O_2-vel (2. ábra).



2. ábra

Ismeretes, hogy az MAE, MEB háromszögek hasonlóak, hiszen megfelelő szögeik egyenlőek. Mivel az a centrális hasonlóság, mely E-t F-be viszi, az E-n átmenő, EF-re merőleges egyenest F-en átmenő EF-re merőleges egyenesbe, O_1-et O_2-be k_1-et k_2-be, A-t C-be, B-t D-be viszi át, azért az MAE háromszög az MCF háromszöghöz, az MEB háromszög az MFD háromszöghöz hasonló, amiből MAE és MEB hasonlósága alapján következik, hogy ez a négy háromszög hasonló egymáshoz, és

$$MA : ME = ME : MB = MC : MF = MF : MD$$

Ebből az előrebocsátott összefüggés alapján következik, hogy

$$(MC - MA) : (MF - ME) = (MF - ME) : (MD - MB)$$

vagyis $EF^2 = AC \cdot BD$.

b) Jelöljük GH és AB metszéspontját N-nel (mivel G és H az AB tengely különböző oldalán van, N mindig létezik. Az NAG és NGB háromszögek hasonlóak, és az az N-centrumú hasonlóság, amely G-t H-ba viszi, A-t D-be és B-t C-be viszi. Emiatt az NAG, NGB, NDH, NHC háromszögek hasonlóak és

$$NA : NG = NG : NB = ND : NH = NH : NC$$

Ebből az előrebocsátott összefüggés alapján

$$(ND + NA) : (NH + NG) = (NH + NG) : (NC + NB),$$

vagyis $GH^2 = AD \cdot BC$.