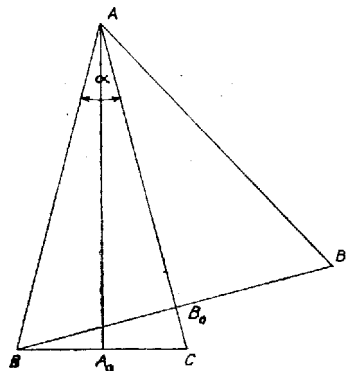


Az állítások igaz, ill. hamis voltára vonatkozó közlést csak úgy tudjuk felhasználni, ha egyenként sorra vesszük az igaz állítások pábjaira lehetséges eseteket.

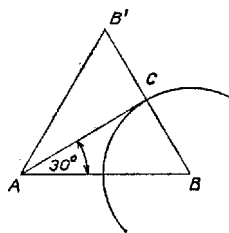
1. Próbáljuk fölvenni, hogy III. és IV. igazak. Ekkor $AB = AC = 2BC = 2$, a háromszög egyenlő szárú, így sem az alapján, nincs derékszög, sem a szárai közt, hiszen $BC < AB$ alapján $\alpha = \angle BAC < \angle ACB < 90^\circ$; eszerint I. hamis (1. ábra).



1. ábra

Továbbá a háromszög tengelymagassága $AA_0 = \sqrt{15}/2$, a száakra merőleges magasságok fele ekkorák, hiszen két magasság aránya bármely háromszögben a megfelelő oldalak arányának reciprokával egyenlő, így $\sin \alpha = \sqrt{15}/8 \neq 1/2 = \sin 30^\circ$, tehát $\alpha \neq 30^\circ$, II. is hamis. (Másképpen így mondhatjuk ezt: $BB_0 = \sqrt{15}/4$, így $BB' = \sqrt{15}/2 < 2 = AB = AB'$ – ahol B' a B -nek AC -re való tükörképe, ezért $\angle BAB' < \angle ABB' < \angle AB'B$, így $\angle BAB' < 60^\circ$, $\angle BAC < 30^\circ$.) Így a hamis állítások száma 2, amint a feladat állítja, találtunk egy megfelelő ABC háromszöget, és ennek kerülete 5 egység.

2. Ha a III.-at és a II.-at próbáljuk igaznak venni, akkor a háromszöget megszerkeszthetjük. Egy A csúcsú 30° -os szög egyik szárára $AB = 2$ egységet mérünk fel, majd B körül $BC = 1$ sugárral kört írunk, ekkor C csak az ív és a másik szár közös pontja lehet (2. ábra).

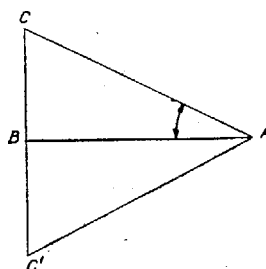


2. ábra

Megmutatjuk, hogy csak egy közös pontjuk van, vagyis érintkeznek, így pedig a BCA szög derékszög, I. igaz, a közléssel ellentétben, tehát ez a háromszög nem felel meg. Valóban, a másik szár és a kör közös pontja rajta van a körnek a másik szárra vonatkozó tükörképén is, a B' körüli, 1 sugarú körön, ahol $\angle B'AB = 2 \cdot 30^\circ$ és $B'A = BA = 2$. Így pedig $B'AB$ szabályos háromszög, $BB' = 2$, a két kör éppen érinti egymást és az AC egyenest, amint állítottuk.

3. Ugyanígy nem felel meg az ABC háromszög, ha a IV.-et és a II.-t vesszük igaznak, hiszen ez az eset B és C cseréjével az előbbibe megy át, így B -nél volna derékszög.

4. III. állítás mellé az I.-t véve igaznak, az ABC háromszög megfelel, ha a derékszög csúcsának B -t vesszük (3. ábra).



3. ábra

Így ugyanis $AC = \sqrt{BC^2 + BA^2} = \sqrt{5} \neq 2$, tehát IV. hamis; másrészt

$$\operatorname{tg} BAC \triangleleft = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^\circ, \quad A \triangleleft < 30^\circ,$$

vagyis II. is hamis, ugyanis a tangensfüggvény a 0° , 90° intervallumban minden értéket, amit fölvesz, csak egy helyen vesz föl. (Mondhatjuk így is: $BAC \triangleleft < 30^\circ$, mert C -nek BA -ra vonatkozó tükörképét C' -vel jelölve, az ACC' háromszögben $AC = AC' > CC'$, emiatt $CAC' \triangleleft < ACC' \triangleleft = AC'C \triangleleft$, és így $CAC' \triangleleft < 60^\circ$, $CAB \triangleleft < 30^\circ$.) A talált háromszög kerülete $3 + \sqrt{5}$ egység.

Ha viszont (tovább is III. és I. igaz volta esetében) C -t vesszük a derékszög csúcsának, a fentiekhez hasonlóan látható, hogy $BAC \triangleleft = 30^\circ$, II. is igaz, tehát a háromszög nem felel meg. – Végül nem kell próbálnunk A -ba tenni derékszöget, hiszen $BC < AB$ alapján $BAC \triangleleft < ACB \triangleleft$, és így $BAC \triangleleft < 90^\circ$.

5. Lényegében a legutóbbi esetre jutunk, ha a IV.-et és az I.-t vesszük igaznak, csupán B -t és C -t kell fölcserélnünk: ha $ACB \triangleleft = 90^\circ$ és $AC = 2BC$, akkor $A \triangleleft < 30^\circ$ és $AB = \sqrt{5}$, II. és III. hamis, a kerület $3 + \sqrt{5}$.

6. Végül olyan ABC háromszög sem felelhet meg, melyben II. és I. igaz: $BAC \triangleleft = 30^\circ$ és vagy B -nél vagy C -nél derékszög van, mert ekkor igaz IV., ill. III. is. Más lehetőség nincs a két igaz állítás megválasztására.

Mindezek szerint az I.–IV. állítások és a „2 igaz, 2 hamis” közlés alapján megfelelő háromszög kerülete lehet 5 és lehet $3 + \sqrt{5}$ egységnyi.

Kósa Zsuzsanna (Budapest, Móricz Zs. Gimn., I. o. t.)