

I. megoldás. Minden jelenlevőnek 2 más jelenlevővel van a kérdés szempontjából figyelembe veendő kapcsolata, egyikkel házastársi (a vázlaton kettős vonal) és testvéri (egyes vonal). Jelöljük n házaspár esetén a lehetséges (mondjuk valaki által tippelhető) esetek számát t_n -nel.

Kezdjük a meggondolásunkat a társaság legidősebb tagjával, A -val (egyértelműen kiválasztható), legyen a házastársa a , testvére pedig b , továbbá b házastársa B (1. ábra). Ezek nyilvánvalóan mind különböző személyek, tehát $n \geq 2$, ennél fogva $t_1 = 0$.

Az $n = 2$ esetben nincs is több jelenlevő, így a második testvérpár csak B , a lehet, de mivel b -ként a második házaspár mindegyik tagja figyelembe veendő, azért $t_2 = 2$.

Ha $n = 3$, akkor B és a nem lehetnek testvérek, különben a harmadik házaspár egyben testvérpár is volna. Így B testvére a harmadik házaspár valamelyik tagja, jelöljük c -vel, házastársát C -vel, és ekkor C testvére csak a lehet. Eddigi gondolatmenetünkben most b -re 4-féleképpen tippelhetünk az A , a után hátra levő 2 házaspár tagjai közül, c -re 2-féleképpen, ezért $t_3 = 4 \cdot 2 = 8$ (2. ábra).

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{a = A - b = B}_{1. \text{ ábra}} & \underbrace{a = A - b = B - c = C}_{2. \text{ ábra}} & \underbrace{c = C - d = D}_{3. \text{ ábra}} \end{array}$$

Az $n = 4$ esetben B testvére ismét lehet a , vagy a társaság egy az eddigiektől (A , a , b , B) különböző tagja, most ezt jelölje c .

Az előbbi esetben az első két házaspár olyan megoldást ad, mint $n = 2$ esetén és ugyanez áll a kimaradt két házaspárra, az utóbbiak lehetőségeit a közülük legidősebb személyből, C -ből kiindulva vesszük számba, a társaság ekkor 2 körbe állítható (1. és 3. ábra).

Az utóbbi esetben c házastársának, C -nek testvére ismét nem a , tehát a 4. házaspár valamelyik tagja, legyen d , ekkor ennek házastársa, D alkot testvérpárt a -val; ekkor a tippet leíró ábra a „ $d = D$ ” résszel hosszabb a 2. ábrabelinél, ismét 1 körbe állítható az összes jelenlevő. Most b -re mindenképpen 6-féle tipp lehetséges, tovább pedig az 1. és 3. ábra szerint d -re t_2 , azaz 2 tipp (ekkor ugyanis c -t nem választjuk, hanem kiadódik), az utóbbi esetben pedig c -re 4 és d -re 2, vagyis a folytatásra $4 \cdot 2$, így $t_4 = 6(2 + 4 \cdot 2) = 60$.

Végül $n = 5$ esetében az eddigiiek mintájára a vagy B -nek vagy C -nek vagy pedig az ötödik pár E tagjának a testvére. Az első és második esetben a még maradó 3, ill. 2 házaspárból alakul az újabb kör az $n = 3$, ill. $n = 2$ szerint; b -re mindenképpen 8 lehetőség van, c vagy kiadódik vagy 6 személy közül választható, az utóbbi esetben d vagy kiadódik vagy 4 közül, e pedig 2 közül választható:

$$t_5 = [t_3 + 6(t_2 + 4 \cdot 2)] = 8(8 + 60) = 544.$$

II. megoldás. Jelöljük a házaspárokat az $1, 2, \dots, n$ sorszámokkal, a k -edik pár két tagját k_1 -gyel és k_2 -vel ($1 \leq k \leq n$); legyen továbbá az n házaspár testvér-párokból rendezési lehetőségeinek száma t_n .

Legyen 1_1 testvére k_i , ahol $k \neq 1$ és $i = 1$, vagy 2, tehát megválasztására $2(n-1)$ lehetőség van. Tekintsük k_i házastársának, k_{3-i} -nek testvérét. Ha ez éppen 1_2 , akkor az 1-es és a k jelű házaspárt elintéztük és a maradó $(n-2)$ házaspár testvérpárokból rendezési lehetőségeinek számát t_{n-2} .

Ha pedig k_{3-i} és 1_2 nem testvérek, akkor tekinthetők egy ál-házaspárnak, mert megvan ugyanaz a tulajdonságuk, ami számunkra a valódi házaspárokból egyetlen figyelembe veendő, hogy ti. nem alakítható belőlük testvérpár. Így a további $(n-1)$ párból (valódi és ál) kell $(n-1)$ testvérpárt alakítanunk, erre t_{n-1} lehetőség van. Más lehetőség nincs k_{3-i} -re, eszerint

$$t_n = (2n-2)(t_{n-2} + t_{n-1}).$$

Ezzel t_n meghatározását visszavezettük t_{n-1} és t_{n-2} meghatározására, és tulajdonképpen bármely n természetes szám esetére megoldottuk a feladatot a kapott ún. *rekurzív* (visszafutó, korábbi értékekre támaszkodó) képlettel.

Mármint $t_1 = 0$ és $t_2 = 2$ (hiszen 1_1 testvérenek próbálandó 2_1 is, 2_2 is, és ez meghatározza a másik testvérpárt is), ezek alapján $t_3 = 4(t_1 + t_2) = 8$; $t_4 = 6(t_2 + t_3) = 60$; végül $t_5 = 8(t_3 + t_4) = 544$.

Megjegyzés. Az I. megoldás gondolatmenetét követve tetszőleges n -re kapjuk a

$$\begin{aligned} t_n = & (2n-2)t_{n-2} + (2n-2)(2n-4)t_{n-3} + \dots + (2n-2)(2n-4) \cdot \dots \cdot 4t_1 + \\ & + (2n-2)(2n-4) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2 \end{aligned}$$

összefüggést. Ennek alapján is meghatározható t_n értéke lépésről lépésre.