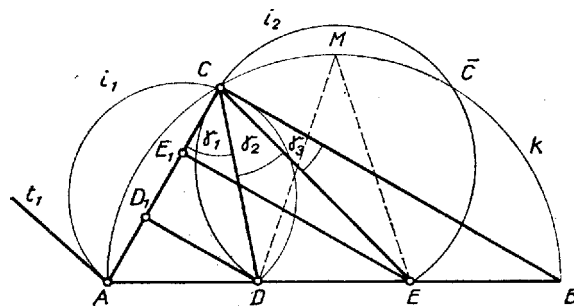


I. megoldás (szerkesztéssel). A feladat föltevésai távolsági arányokat és egy szöget tartalmaznak, és a kérdés is szögre vonatkozik, így az alakzat tetszés szerint nagyítható.

Fölvéve tetszőlegesen az AB átfogót és kijelölve D, E harmadoló pontjait úgy, hogy $AD = DE = EB$, a C csúcs mértani helye egyrészt az AB átmérőjű k Thalész-félkör az AB egyenessel kettévágott sík egyik, F félsíkján, másrészt az AD szakasz $ACD \sphericalangle = \gamma_1$ nyílású i_1 látókörive, és a DE szakasz $DCE \sphericalangle = \gamma_2$ nyílású i_2 látókörive, ugyancsak az F félsíkon (1. ábra, lásd a 20. oldalon).



1. ábra

1. Ezek szerint ha γ_1 adott, akkor C megfelelő helyzetét k -nak és i_1 -nek az A -tól különböző közös pontja adja, és γ_2 a CD, CE félegyeneseink közti szög. A szerkesztés helyessége nyilvánvaló. Eljárásunk egyértelműen megadja γ_2 -t, természetesen a nyilvánvaló $0^\circ < \gamma_1 < 90^\circ$ esetre szorítkozva, ekkor ugyanis i_1 -nek A -beli t_1 félérintője – az érintőjének F -beli félegyenese tompaszöget ($180^\circ - \gamma_1$ -et) zár be az AB félegyenessel, ezért i_1 -nek van pontja k -n kívül, D végpontja viszont belül van a k -n.

Meggondolásunk és szerkesztésünk akkor is érvényes, ha γ_1 -et úgy értelmezzük, hogy D a B -hez közelebbi harmadolópontja az átfogónak, így azonban más lesz γ_2 értéke. Itt jegyezzük meg mindjárt, hogy γ_1 határozta meg magának az ABC háromszögnek a hegyes szögeit is.

2. Ha pedig γ_2 adott, akkor C -ként k és i_2 közös pontjai jönnek tekintetbe, és γ_1 a CA, CD félegyeneseink közti szög lesz. A közös pontok száma 2, 1, ill. 0 aszerint, hogy i_2 metszi vagy érinti k -t, ill. hogy minden pontja k belsejében van. k -nak és i_2 -nek közös szimmetria tengelye az AB és DE szakaszok f közös felező merőlegese, így a mondott érintés csak f -nek k -n levő M pontjában lehetséges. Ezt felhasználva k és i_2 közös pontjainak száma aszerint lesz 2, 1, ill. 0, hogy γ_2 kisebb, ill. egyenlő, ill. nagyobb, mint a $DME \sphericalangle$, vagyis annak az egyenlő szárú háromszögnek a szárszöge, melyben az alap és a magasság aránya $(AB/3) : (AB/2) = 2 : 3$. Más szóval, aszerint, hogy

$$(1) \quad \frac{\gamma_2}{2} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \arctg \frac{1}{3} \quad (= 0,322 \text{ radián} = 18^\circ 26'), \quad \gamma_2 \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 36^\circ 52'.$$

Két közös pont, C és $\bar{C}$ esetén a szimmetria alapján az $A\bar{C}D \sphericalangle$ egyenlő a $BCE \sphericalangle$ -gel. Mondhatjuk tehát azt is, hogy C -re szorítkozva $ACD \sphericalangle$ és $BCE \sphericalangle$ a feladat második részének 2 megoldása, továbbá e két megoldás egyenlő, ha C az M -ben adódik, végül nincs megoldás γ_1 -re, ha C -re sincs megoldás.

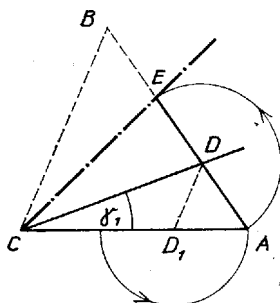
Borusz Mária (Tata, Eötvös J. Gimn., II. o. t.)

Méző László (Tatabánya, Árpád Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Könnyű utánaszámítani, hogy γ_2 határszögét megadja a 3, 4, 5 egységnyi oldalú (derékszögű) háromszög legkisebbik szöge is.

2. Könnyen általánosíthatjuk a megoldást arra az esetre, ha ACB tetszőleges adott szög; az (1) feltétel módosulásának vizsgálatát az olvasóra hagyjuk.

3. Adott γ_1 esetében célhoz vezet a következő szerkesztés is. A CA félegyenésre (ugyanazon oldalán) fölmérjük γ_1 -et, új szára CD (D a szár egy tetszőleges pontja) és az ACB ismert szöget (2. ábra). D -n át párhuzamost húzunk BC -vel, ennek metszéspontja CA -val D_1 , ekkor D_1 -et C -ből $3/2$ -szeresére nagyítva kapjuk A -t, ennek tükröképe D -re E , és ezzel megkaptuk a DCE szöget.



2. ábra

II. megoldás (számítással). Legyen D és E merőleges vetülete CA -n D_1 , E_1 , így $CE_1 = E_1D_1 = CD_1/2$ és $EE_1 = 2DD_1$ (1. ábra), tehát

$$(1) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_1 &= \frac{DD_1}{CD_1}, \quad \operatorname{tg} (\gamma_1 + \gamma_2) = \frac{EE_1}{CE_1} = 4 \operatorname{tg} \gamma_1, \\ \operatorname{tg} \gamma_2 &= \operatorname{tg} \{ (\gamma_1 + \gamma_2) - \gamma_1 \} = \frac{\operatorname{tg} (\gamma_1 + \gamma_2) - \operatorname{tg} \gamma_1}{1 + \operatorname{tg} \gamma_1 \cdot \operatorname{tg} (\gamma_1 + \gamma_2)} = \frac{3 \operatorname{tg} \gamma_1}{1 + 4 \operatorname{tg} \gamma_1}. \end{aligned}$$

Adott γ_1 – természetesen $0 < \gamma_1 < 90^\circ$ – esetén innen $\operatorname{tg} \gamma_2$ pozitív, és γ_2 – mint hegyes szög – egyértelműen meg van határozva.

Ha viszont γ_2 adott, akkor átrendezéssel

$$(2) \quad \begin{aligned} 4 \operatorname{tg} \gamma_2 \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma_1 - 3 \operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2 &= 0, \\ \operatorname{tg} \gamma_1 &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16 \operatorname{tg}^2 \gamma_2}}{8 \operatorname{tg} \gamma_2}, \end{aligned}$$

valós megoldás létezésének föltétele

$$(3) \quad 9 - 16 \operatorname{tg}^2 \gamma_2 \geq 0 \quad \text{azaz} \quad 0 < \gamma_2 \leq \arctg \frac{3}{4},$$

és egyenlőség esetén $\operatorname{tg} \gamma_1$ két értéke egyenlő. Az egyenlőtlenség teljesülése esetén (1)-nek mindkét megoldása, $\operatorname{tg} \gamma'_1$ és $\operatorname{tg} \gamma''_1$ megfelel, mert pozitívak, hiszen (2) szerint összegük is, szorzatuk is pozitív:

$$\operatorname{tg} \gamma'_1 + \operatorname{tg} \gamma''_1 = \frac{3}{4 \operatorname{tg} \gamma_2}, \quad \operatorname{tg} \gamma'_1 \cdot \operatorname{tg} \gamma''_1 = \frac{1}{4};$$

Azt is látjuk ezekből, hogy $\gamma'_1 + \gamma''_1$ a γ_2 -nek pótszöge:

$$\operatorname{tg} (\gamma'_1 + \gamma''_1) = \frac{\operatorname{tg} \gamma'_1 + \operatorname{tg} \gamma''_1}{1 - \operatorname{tg} \gamma'_1 \cdot \operatorname{tg} \gamma''_1} = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma_2} = \operatorname{ctg} \gamma_2,$$

tehát $\gamma'_1 + \gamma_2 + \gamma''_1 = 90^\circ$, vagyis adott γ_2 esetén γ_1 -re ugyan két gyököt is kapunk, de ezek ugyanannak a háromszögnek rész-szögei.

Amennyiben az átfogó pontjainak sorrendje A, E, D, B , úgy (1) helyére $4 \operatorname{tg} (\gamma_1 - \gamma_2) = \operatorname{tg} \gamma_1$ lép, $\operatorname{tg} \gamma_2 = (3 \operatorname{tg} \gamma_1) / (4 + \operatorname{tg}^2 \gamma_1)$, ekkor $\gamma'_1 + \gamma''_1 - \gamma_2 = 90^\circ$ (γ_2 kétszer fedett), a számítás hasonlóan végezhető, a valós megoldás létezésének föltétele – a szimmetria alapján – ismét (3), csak egy megoldás van.

Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy $BCE \sphericalangle = \gamma_3$ jelöléssel fennáll $3 \sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_3 - \sin \gamma_2 = 0$, ennek alapján is végezhetjük számításainkat, eleve tudva, hogy γ_1 és γ_3 a feladat 2. részének 2. megoldása.