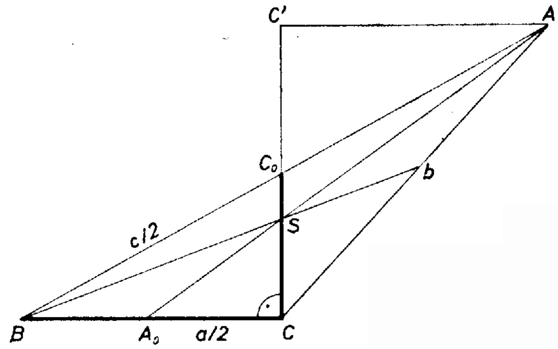
1. Legyen a kérdéses $ABC$ háromszög tompaszögének csúcsa $C$ és legyen az onnan induló $CC_0$ súlyvonala a $CB$ oldalra merőleges ($C_0$ az $AB$ oldal felezőpontja).




*1. ábra*

Így a $C_0BC$ derékszögű háromszögből az oldalak és súlyvonalak szokásos jelöléseivel (1. ábra)

$$CC_0^2 = s_c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - a^2.$$

Az $ABC$ háromszöget $C_0$ -ra tükrözve $A$ és $B$ egymásba mennek át, $C$ képe pedig legyen $C'$. így $C'A\#CB$, és a $CC'A$ derékszögű háromszögből

$$CC'^2 = 4s_c^2 = b^2 - a^2.$$

E két összefüggésből $s_c$ kiküszöbölésével a három oldal között egyszerű összefüggés adódik:

(1) $$c^2 = 3a^2 + b^2, \quad \text{másképpen} \quad 3a^2 + b^2 - c^2 = 0.$$

2. Legyen még $BC$ felezőpontja $A_0$, és az $ABC$ háromszög súlypontja $S$. Így $SA_0 = AA_0/3 = s_a/3$, és $SB = 2s_b/3$, $SC = 2s_c/3$, és az $SCA_0$, $SCB$ derékszögű háromszögekből:

$$CA_0^2 = \frac{a^2}{4} = \frac{s_a^2}{9} - \frac{4s_c^2}{9},$$
$$CB^2 = a^2 = \frac{4s_b^2}{9} - \frac{4s_c^2}{9}.$$

Ezekből a kiküszöbölése útján kapunk összefüggést a súlyvonalak között:

(2) $$3s_c^2 = s_a^2 - s_b^2, \quad \text{másképpen} \quad s_a^2 - s_b^2 - 3s_c^2 = 0.$$

A talált (1) összefüggés különböző együtthatói szerint a tompaszöggel szemben fekvő $c$ oldal, a súlyvonalra merőleges $a$ oldal és $b$, a harmadik oldal az összefüggésben megkülönböztetett szerepet kapott, és ugyanez mondható a súlyvonalak (2) összefüggésére.

*Megjegyzések.* 1. Bizonyításunk szerint (1) és (2) szükséges feltételei annak, hogy $SC$ és $CB$ merőlegesen álljanak egymásra. Könnyű megmutatni az oldalak és súlyvonalak ismert összefüggései alapján – amelyek közül egyet-egyet ide iktatunk:[1]

$$4s_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2, \qquad 9c^2 = 8s_a^2 + 8s_b^2 - 4s_c^2,$$

hogy a feltételek elegendők is ahhoz, hogy a kérdéses merőleges állás bekövetkezzék. – Minthogy a feladat eredetileg versenyfeladat volt és a versenyek munkaideje kötött, a feladat a megfordítást nem kérdezte.

2. A kapott (1) és (2) összefüggések hasonlósága (ami még jobban látszik, ha (2)-t

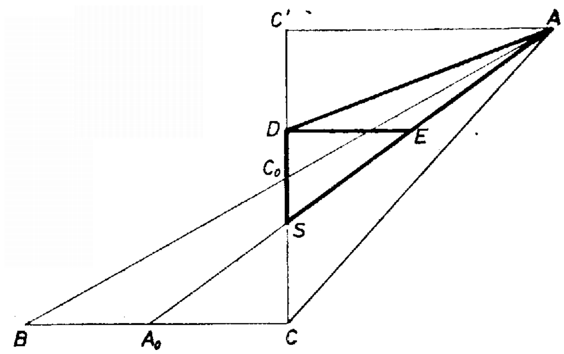
$$s_a^2 = 3s_c^2 + s_b^2$$

alakban írjuk), arra utal, hogy a súlyvonalakból mint oldalakból szerkesztett háromszögnek is megvan ugyanaz a tulajdonsága, mint az eredeti háromszögnek. Valóban, ha a $C'S$, $AS$ szakaszok felezőpontját $D$-vel, illetve $E$-vel jelöljük, az $ADS$ háromszögben

$$DS = \frac{2}{3}\, s_c, \qquad AD(= BS) = \frac{2}{3}\, s_b, \qquad AS = \frac{2}{3}\, s_a,$$

tehát ez a háromszög hasonló a súlyvonalakból mint oldalakból szerkeszthető háromszöghöz, benne $D$-nél tompaszög van, és a $DE$ súlyvonal merőleges a $DS$ oldalra. (Ezzel természetesen (2)-re is újabb bizonyítást adtunk.)

[1] Az elsőt legutóbb az 1772. feladatban használtuk, K. M. L. 44 (1972) 10 – 11. oldal; a második úgy adódik, hogy felírjuk hasonlóan $4s_a^2$-et és $4s_b^2$-et és a három egyenletből álló rendszert megoldjuk $a^2$-re, $b^2$-re, $c^2$-re mint ismeretlenekre.




*2. ábra*