

Törtünk így alakítható:

$$\frac{n^2 + 2}{n^2 + n} = \frac{n^2 + n - n + 2}{n^2 + n} = 1 - \frac{n - 2}{n(n + 1)},$$

tehát akkor és csak akkor nem egyszerűsíthető, ha az utolsó alak második törtje – jelöljük t -vel – nem egyszerűsíthető.

t csak az $(n - 2)$ számnak valódi (azaz 1-nél nagyobb) olyan osztójával egyszerűsíthető, amely egyszersmind vagy külön az n -nek, vagy pedig külön az $(n + 1)$ -nek is osztója, ugyanis olyan osztója nem lehet $(n - 2)$ -nek, amely n -nek is és $(n + 1)$ -nek is osztója volna, hiszen az utóbbiaknak, két szomszédos természetes számnak, nincs valódi közös osztója.

Mármint n és $(n - 2)$ valódi közös osztói egyszersmind különbségüknek, 2-nek is osztói, vagyis $\frac{n - 2}{n}$ egyszerűsítése akkor és csak akkor nem lehetséges, ha n nem osztható 2-vel, az $n : 2$ osztás maradéka 1.

Hasonlóan $(n + 1)$ és $(n - 2)$ valódi közös osztója csak 3 lehet – különbségüknek, 3-nak egyetlen valódi közös osztója –, tehát $\frac{n - 2}{n + 1}$ akkor és csak akkor nem egyszerűsíthető, ha $n + 1$ nem osztható 3-mal. Más szóval: ha az $(n + 1) : 3$ osztás maradéka 1 vagy 2, vagyis ha az $n : 3$ osztás maradéka 0 vagy 1.

A két feltétel egybefoglalható, ha n -nek 2-vel és a 3-mal való osztási maradéka helyett a $2 \cdot 3 = 6$ -tal való osztási maradékát tekintjük. Ebből a szempontból minden egész szám a következő 6 alak valamelyikébe tartozik: $6k$, $(6k + 1)$, $(6k + 2)$, $(6k + 3)$, $(6k + 4)$, $(6k + 5)$, ahol k egész szám. Az első feltételnek csak a 2., 4. és 6. alak felel meg, a másodiknak az 1., 2., 4. és 5. alak, tehát mindkettőnek csak a 2. és 4. alak. Mindezek szerint a vizsgált tört az $n = 6k + 1$ és az $n = 6k + 3$ alakú természetes számok esetében nem egyszerűsíthető, minden egyéb esetben egyszerűsíthető.

Gáll Márton (Budapest, Arany J. Gimn. és Ált. Isk., 8. o. t.)