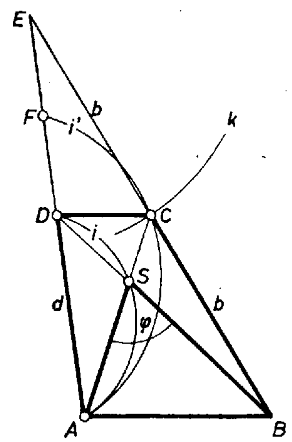
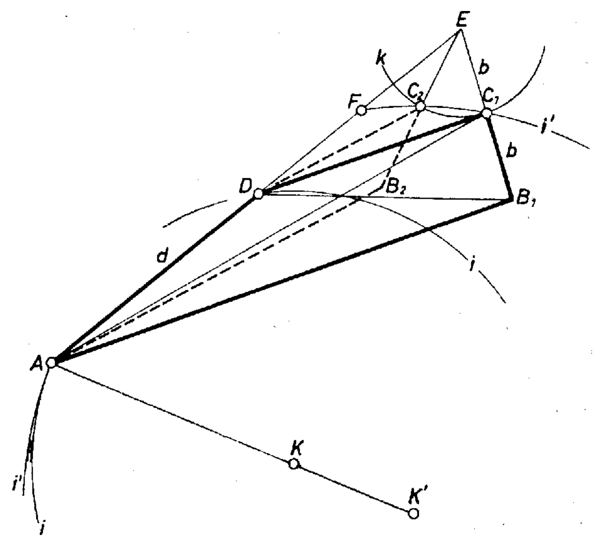
I. megoldás (vázlat). Legyen a keresett $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$ és $AB = 2CD$, az adott szárak $AD = d$ és $BC = b$, az átlók metszéspontja S, és $ASB\sphericalangle = \varphi$. Az adott arány alapján a szárak E metszéspontjára $ED : EA = 1 : 2$, tehát E az A tükörképe D-re, és B-é is a C-re mint centrumra nézve. Továbbá AC és BD az ABE háromszög súlyvonalai, tehát S a súlypontja, így $AC : AS = 3 : 2$.





Mindezek S-re egy, C-re pedig két mértani helyet adnak: S rajta van a fölvett AD szakasz $180° - \varphi$ nyílású i látókörívén (a szerkesztés elején megválaszthatjuk, hogy melyiken), C egyrészt az i-nek az A centrumból $3 : 2$ arányban nagyított i' képén, másrészt az E körüli $EC = CB = b$ sugarú k körön (pontosabban: azon a félkörön, amely az AE egyenesnek i-t tartalmazó oldalán) van, tehát C ezek közös pontja. Végül B az E tükörképe C-re.

A szerkesztés helyességét nem bizonyítjuk, inkább a megoldások számát vázoljuk. i' mindenesetre átmegy a DE szakasz F felezőpontján. Ha $\varphi \le 90°$, akkor $180° - \varphi \ge 90°$, ezért i és i' legföljebb félkörív, tehát i'-n végigmenve F-től A-ig, állandóan távolodunk E-től. Így k egyetlen belső pontjában metszi i'-t, ha $\dfrac{d}{2} < b < 2d$, különben nincs megoldás.

Ha $\varphi > 90°$, akkor hasonlóan i és i' nagyobbak félkörívnél, az F-től i'-n haladva előbb közeledünk E-hez, majd távolodunk tőle, végül ismét közeledünk, ezért a $\dfrac{d}{2} < b < 2d$ esetben itt is 1 megoldás van, a $d/2$-nél kisebb és $2d$-nél nagyobb értékekre egy-egy bizonyos korlátig 2 megoldás, i' és k érintkezése esetén ismét egy, más esetekben nincs megoldás. A mondott korlát nyilvánvalóan a k és E közti legkisebb, ill. legnagyobb távolság.

Horváth Eszter (Nyíregyháza)

Megjegyzések. 1. Lényegében ugyanígy szerkeszthető elsőként a B csúcs mint az E körüli $2b$ sugarú kör és az i-ből D centrumú 3-szoros nagyítása kapott i'' metszéspontja.

2. Ez a kérdés a 849. gyakorlat alakításából keletkezett: „Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldala, továbbá az a szög, amely alatt a harmadik oldal a súlypontból látszik.” Megoldása K. M. L. 28 (1964) 116. old.

3. A feladatot csak *konvex* trapéz esetére oldottuk meg. Ajánljuk az érdeklődőknek a megfelelő módosítások elvégzését *hurkolt* trapéz esetére.

4. Módosíthatók a megoldások arra az esetre is, ha a párhuzamos oldalak aránya $1 : 2$ helyett más értékű.

II. megoldás (vázlat). Toljuk el az ADB törött vonalat a $\overrightarrow{DC}$ vektorral és jelöljük A, B új helyzetét A'-vel, ill. B'-vel. Ekkor egyrészt A' és B harmadolják AB'-t, másrészt $ACB'\sphericalangle = ASB\sphericalangle = \varphi$.

Ezek alapján az alakzathoz hasonlót szerkeszthetünk tetszés szerint fölvett $A^*B'^*$ szakaszból kiindulva: megszerkesztjük φ nyílású látókörívét, harmadoló pontjaihoz pedig – A'^*-hoz és B^*-hoz mint alappontokhoz vesszük a $d : b$ arányú Apollóniosz-kört, ezek közös pontja C^*. Már ebből a helyzetből végrehajthatjuk a szükséges nagyítást, B^*-ot véve centrumnak: B^*C^*-ra, azaz BC^*-ra fölmérjük $BC = b$-t, ekkor A-t a BA^* egyenesből a C^*A^*-gal C-n át húzott párhuzamos metszi ki, továbbá könnyen kapjuk D-t is.

Ezúttal a bizonyításon túl a diszkussziót is az olvasóra hagyjuk.

Ureczky József (Csurgó)