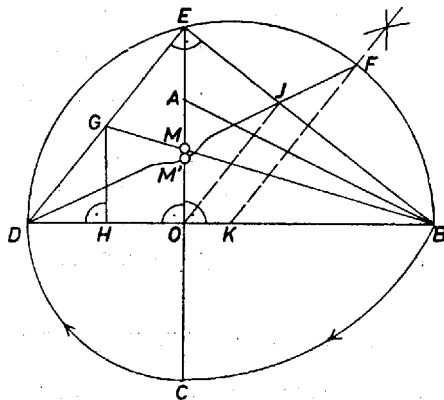


I. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a sejtés igaz. Ehhez néhány további jelölést vezetünk be: BD felezőpontja K , a G vetülete OB -n H , az OE egyenes metszéspontja DF -fel M' , BG -vel M (1. ábra),



és azt mutatjuk meg, hogy M' azonos M -mel. Ehhez, mivel M és M' az OB -nek ugyanazon oldalán vannak, mint már G és F is, elég belátni, hogy $OM' = OM$. Előre megjegyezzük, hogy a számítás során, a szerkesztésből adódóan ismételten derékszögű háromszögeket használunk fel, köztük két hasonló párt; rövidség kedvéért ezeket újra nem említjük.

A megindulásban $OB = 2 \cdot OA$ alapján $AB = AC = \sqrt{5} \cdot OA$, ezért $OD = OC = (\sqrt{5} - 1)OA$, továbbá $DB = DO + 2 \cdot OA = (\sqrt{5} + 1)OA$, tehát $DE = \sqrt{DO \cdot DB} = 2 \cdot OA = OB$. Ezek alapján

$$\begin{aligned} OM &= HG \cdot \frac{OB}{HB} = \frac{OE}{2} \cdot \frac{2 \cdot OA}{OH + OB} = OE \cdot \frac{2 \cdot OA}{OD + 4 \cdot OA} = OE \cdot \frac{2}{\sqrt{5} + 3} = \\ &= OE \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Az EF , FB ívek egyenlősége alapján DF felezi a BDE szöget, ezért a DOE háromszögből

$$OM' = OE \cdot \frac{DO}{DO + DE} = OE \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = OM,$$

amint azt bizonyítani akartuk.

II. megoldás. *Előzetes megjegyzés.* A sejtés kimondható így is: a leírt módon megszerkesztett *DBE* derékszögű háromszögben a *DB* átfogó egyik végpontjából induló súlyvonal és a másik végpontból induló szögfelező az átfogóra merőleges magasságon metszik egymást. Ebből az egyszerű kimondásból kimaradt a kiindulási $OB = 2 \cdot OA$ kapcsolat tetszetőssége, de vele a 3 lépéses szerkesztés hosszadalmassága is. Az utóbbi helyett tetszetős, rövid föltevessel kezdhethénk: ha egy derékszögű háromszögben az átfogóra merőleges magasság az átfogót $DO : OB = (\sqrt{5} - 1) : 2$ arányban osztja részekre, akkor a mondott három vonal egy pontban metszi egymást. Így viszont a megadott arány irracionális értéke hat mesterkéltten. Avégett, hogy ezt is elkerüljük, az arány értékét tesszük meg kérdésnek, a tetszetős, bizonyítandó állítást pedig föltevésnek, és ezt tekintjük feladatunknak:

Egy derékszögű háromszögben az átfogó egyik végpontjából induló súlyvonal és a másik végpontjából induló szögfelező az átfogóra merőlegesen magasságon metszik egymást. Milyen arányú részekre osztja az átfogót a magasság?

Tegyük föl tehát, hogy a BDE derékszögű háromszögben a DJ szögfelező és EO magasság M metszéspontját B -vel összekötő egyenes a DE oldalt annak G felezőpontjában metszi. Ekkor a Gy. 1388. gyakorlat I. megoldásában¹ látott segédtevélt a $DOJE$ négyszögre alkalmazva, $OJ \parallel DE$, majd a szögfelező tétel alapján a kérdéses arány:

$$\lambda = \frac{DO}{OB} = \frac{EJ}{JB} = \frac{DE}{DB}.$$

Másrészt, mivel háromszögünk derékszögű,

$$(1) \quad DE^2 = DO \cdot DB,$$

ezeket egybevetve

$$DE^2 = OB \cdot DE, \quad \text{tehát} \quad DE = OB,$$

és ezt írva (1)-be majd osztva OB^2 -nel:

$$OB^2 = DO \cdot DB = DO(DO + OB)$$

$$1 = \frac{DO}{OB} \left(\frac{DO}{OB} + 1 \right) = \lambda(\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda,$$

¹ Lásd K. M. L. 47 (1973) 12. old.

és mivel λ pozitív, azért

$$\lambda = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

A mondottak megfordíthatók, ebből újabb bizonyítás adódik az eredeti feladatra.

Megjegyzések. 1. A feladat általánosításához jutunk, ha a tetszőleges AOB háromszögben $OB = a$, $BA = c$, $AO = b$ jelöléssel fennáll $a(a + b - c) = (b - c)^2$, és a Thalész-kör helyett a $(180^\circ - AOB)$ nyílású látókörívet vesszük. Ez a derékszögű eset gondolatmenete szerint bizonyítható.

2. Ajánljuk az olvasónak, vizsgálja végig azt a módosítást, ha AB -t A körül az OA félegyenesre fordítva képezzük C -t, majd OC -t O körül a BO félegyenesre fordítjuk.

III. megoldás. Az eredeti állítást Ceva tétele² alapján – bizonyítjuk, ezt a DBE háromszögre alkalmazva. Mivel a tétel megfordítható, kimondjuk, hogy a három hányados szorzatáról mutatjuk meg, hogy 1-gyel egyenlő. Jelöljük a BE és DF egyenesek metszéspontját J -vel, ekkor DG és GE egyenlősége alapján elég ezt megmutatnunk:

$$\frac{DO}{OB} \cdot \frac{BJ}{JE} = 1.$$

Az első arány értékét már ismerjük az I. megoldásból, a másodiké pedig a szögfelezés alapján

$$\frac{BJ}{JE} = \frac{BD}{DE} = \frac{BD}{OB},$$

tehát a szorzat valóban

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{5} - 1) + 2}{2} = 1.$$

Megjegyzés. A legutóbbiakat így is mondhatjuk: $DO \cdot BD = OB^2$, $BD : BO = BO : DO$, O az aranymetszés arányában osztja ketté a BD szakaszt.

² Az $A_1A_2A_3$ háromszög A_1A_2 , A_2A_3 és A_2A_1 oldalegyenesének egy-egy pontját rendre B_3 -mal, B_1 -gyel, B_2 -vel jelölve, az A_iB_i egyenesek akkor és csak akkor mennek át egy ponton (ami lehet végtelen távoli is), ha

$$\frac{A_1B_2}{B_3A_2} \cdot \frac{A_2B_1}{B_1A_3} \cdot \frac{A_3B_2}{B_2A_1} = 1.$$

A tétel más megfogalmazása az iskolai függvénytáblázatban 322.4. jelzőszám alatt is megtalálható.