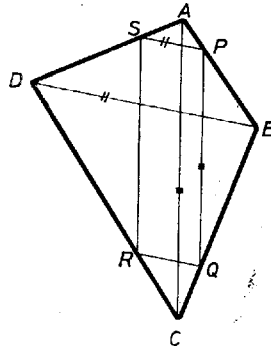


I. megoldás. Jelöljük az adott négyszög csúcsait A, B, C, D -vel, és legyen P az AB szakasz tetszőleges pontja. A P -n át AC -vel, illetve BD -vel párhuzamosan húzott egyenes metszi a BC , illetve AD szakaszt, jelöljük a metszéspontokat Q -val, ill. S -sel, a Q -n átmenő, BD -vel párhuzamos egyenes és a CD szakasz metszéspontját jelöljük R -rel (1. ábra).



1. ábra

Megmutatjuk, hogy P, Q, R, S egy paralelogramma csúcsai.

Mivel a PS, QR oldalak a szerkesztés szerint párhuzamosak, elég azt megmutatnunk, hogy egyenlők is. Az AC, PQ egyenesekre alkalmazva a párhuzamos szelők tételét:

$$AP : AB = CQ : CB.$$

A bal oldalon álló arány az ABD, APS háromszögek hasonlósága alapján egyenlő a $PS : BD$ aránnyal, a jobb oldali pedig (a BCD és QCR háromszögek hasonlósága alapján) egyenlő a $QR : BD$ aránnyal, tehát PS és QR valóban egyenlők.

Kérdés mármost, hogyan kell a P pontot megválasztani, hogy $PQRS$ rombusz legyen. Fenti megoldásunkhoz hasonlóan

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{BD \cdot AP}{AB} : \frac{AC \cdot PB}{AB} = \frac{AP}{PB} : \frac{AC}{BD},$$

eszerint PS és PQ akkor és csakis akkor egyenlők, ha

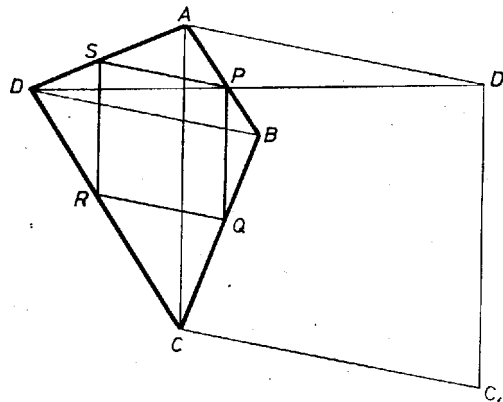
$$(1) \quad AP : PB = AC : BD,$$

vagyis ha a P pont olyan szakaszokra bontja az AB szakaszt, melyek hosszának aránya egyenlő a négyszög átlóinak az arányával.

Ezt a P pontot többféleképpen megszerkeszthetjük. Mérjük fel például az A -n átmenő, BD -vel párhuzamos, az AC egyenes B -t tartalmazó oldala felé induló félegyenesre az AC szakaszt, és a kapott D_1 pontot kössük össze D -vel. Ekkor a DD_1 egyenes a keresett P pontban metszi az AB szakaszt, hiszen

$$AP : PB = AD_1 : BD = AC : BD.$$

P -ből kiindulva a fent leírt lépésekkel kapjuk a követelménynek megfelelő rombuszt (2. ábra).



2. ábra

Megjegyzések. 1. Azt mondtuk fentebb, hogy a P -n átmenő, AC -vel párhuzamos egyenes metszi a BC szakaszt. Valóban, az ABC háromszög AB oldalszakaszának tetszőleges pontján átmenő tetszőleges egyenes metszi a másik két oldalszakasz valamelyikét. A mi egyenesünk viszont nem metszheti az AC egyenest, hiszen párhuzamos vele, így metszenie kell a BC szakaszt.

2. Felhasználtuk, hogy az (1) összefüggés egyértelműen meghatározza a P pont, helyzetét. Valóban, ha P_1 és P_2 az AB szakasz különböző pontjai, és – mondjuk – P_1 az AP_2 , szakaszon van, akkor $AP_1 < AP_2$, $P_1B > P_2B$, tehát

$$\frac{AP_1}{P_1B} < \frac{AP_2}{P_2B}.$$

Eszerint legfeljebb egy pontra teljesülhet (1). Azt viszont láttuk, hogy van olyan pont, melyre (1) teljesül.

3. Meg lehet mutatni, hogy a beírt rombusz oldala feleakkora, mint a két átló harmonikus középarányosa. (Az a és b pozitív számok (szakaszok) harmonikus közepe $h = 2ab/(a + b)$.)

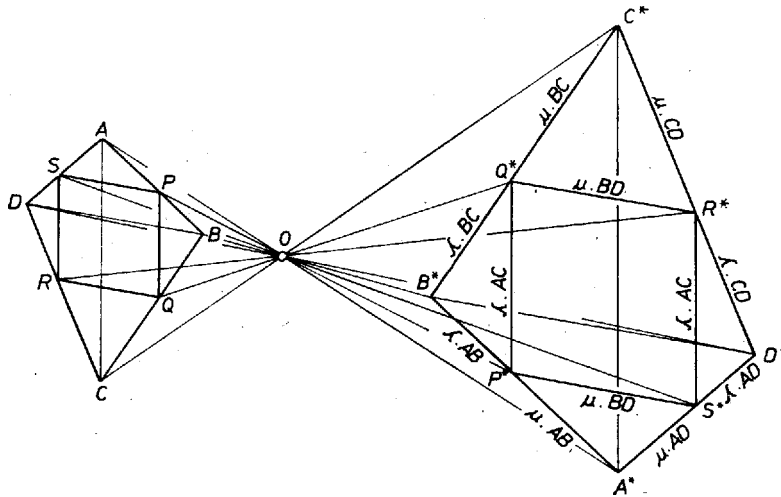
II. megoldás. Tegyük fel, hogy $PQRS$ a keresett rombusz. Nagyítsuk ki ezt D -ből mint centrumból úgy, hogy S csúcsa A -ba kerüljön, ekkor R a C -be kerül, a P, Q csúcsok új helyzetét pedig jelöljük D_1 -gyel, C_1 -gyel. A kapott AD_1C_1C rombuszt megszerkeszthetjük, hiszen, AC oldala adott, AD_1 oldala pedig párhuzamos a BD átlóval. Az így szerkesztett rombuszból D centrumú alkalmas kicsinyítéssel kapjuk a keresett rombuszt (2. ábra).

Szerkesztésünk helyességét nem bizonyítjuk, hiszen az – mint könnyen látható – lényegében azonos az I. megoldásban adott szerkesztéssel.

Megjegyzés. Noha a II. megoldásban ugyanazt a szerkesztést kaptuk, mint az I.-ben, e kettőt mégis különböző megoldásnak tekintjük, hiszen egy szerkesztési feladat megoldása nem csak a szerkesztés leírásából áll, hanem a szerkesztést előkészítő elemzésből, és a szerkesztés helyességének a bizonyításából. – Előre felhívjuk az érdeklődők figyelmét a pontversenyen kívül közzétett 80. probléma megoldására, melyben maga a szerkesztés egyetlen lépésből fog állni, a feladat megoldása viszont alapos megfontolást igényel.

III. megoldás (vázlat). A feladatot megfordítjuk: felvesszünk tetszés szerint egy olyan $P^*Q^*R^*S^*$ rombuszt, melynek oldalai párhuzamosak az adott $ABCD = N$ négyszög AC, BD átlóival, ennek köréje írunk egy $A^*B^*C^*D^* = N^*$ négyszöget, melynek oldalai rendre párhuzamosak N egymás utáni oldalaival, végül az N^* -nak és N -nek O hasonlósági középpontját a P^*, Q^*, R^*, S^* pontokkal összekötő egyenesek által N megfelelő oldalait metszve, kijelöljük a keresett $PQRS$ rombusz csúcsait.

Avégett, hogy O az ábra belsejébe, N és N^* közé essék, a felvett rombusz *bal, alsó* P^* csúcsán át N -nek *jobb, felső*, AB oldalával húztunk párhuzamost, és így tovább (3. ábra).



3. ábra

Itt természetesen bizonyítani kell, hogy N^* hasonló N -hez, hiszen négyszögek esetében nem elég az egymás utáni szögek egyenlősége a hasonlósághoz. Hasonlók azonban az ACB és $P^*Q^*B^*$, az ACD és $S^*R^*D^*$, a BDA és $P^*S^*A^*$, a BDC és $Q^*R^*C^*$ háromszögpárok, és $P^*Q^*/AC = \lambda$, $P^*S^*/BD = \mu$ jelöléssel N^* oldalainak részei kifejezhetők N oldalaival (az ábrán bejegyezve). Ebből látható, hogy N^* és N megfelelő oldalainak aránya $\lambda + \mu$, így N^* bármelyik részháromszöge hasonló N megfelelő részháromszögéhez, pl. $A^*B^*C^* \triangle \sim ABC \triangle$, tehát $N^* \sim N$, O létezik, eljárásunk helyes.

Bolla Mariann (Zirc, Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján, a bizonyítással kiegészítve.