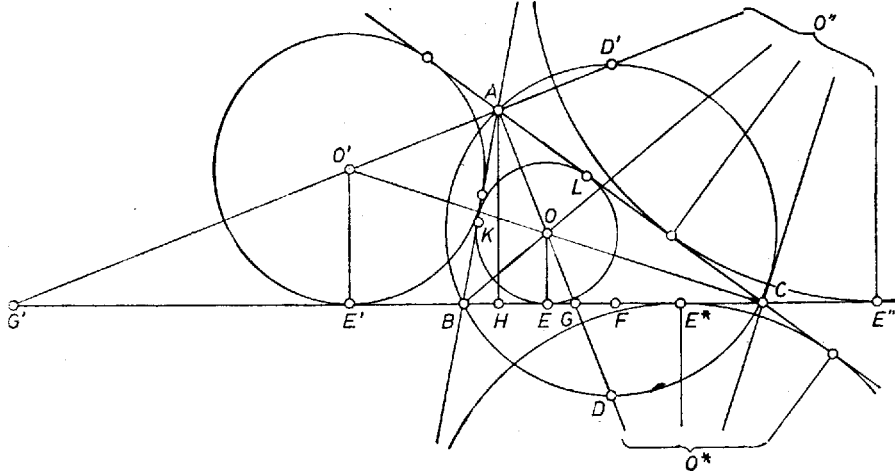


I. Legyenek a mondott E, F, G, H pontok az ABC háromszög BC oldalgyenesén és jelöljük a háromszög oldalait szokás szerint a, b, c betűvel.



Válasszuk úgy a betűzést, hogy $AB = c < AC = b$ (ugyanis $b = c$ esetén a 4 pont egybeesik, az állítás semmitmondó). Föltevéünk mellett viszont a 4 pont különböző egymástól – az állításbeli 4 szakasz egyike sem 0 –, és a pontok sorrendje is egyértelmű. Ugyanis mivel az A csúcs – és vele H is – az F -ben emelt f merőlegesnek B -t tartalmazó partján van, azért ott van E és G is, mert az A -beli szögfelező átmegy f és a háromszög köré írt kör A -t nem tartalmazó BC ívének D felezőpontján, és G , valamint a beírt kör O középpontja az AD húron van; és mivel még $DG < DO < DA$, azért $FG < FE < FH$, tehát a pontok sorrendje C, F, G, E, H, B ; a H pont egybeesik B -vel, ill. túlesik rajta, ha $CBA < \geq 90^\circ$.

Ezek alapján a négy pontnak B -től mért távolságaiból az állításbeli négy szakasz hossza kiszámítható. Mindjárt elsőnek $BF = a/2$. A szögfelező osztási aránya alapján $BG = ac/(b+c)$. A beírt körhöz a csúcsokból húzott érintőszakaszok egyenlősége alapján, a kör, AB -n levő K és AC -n levő L érintési pontját is felhasználva

$$BE = \frac{BK + BE}{2} = \frac{BA + BC - (AL + CL)}{2} = \frac{c + a - b}{2}.$$

Végül az AHB és AHC derékszögű háromszögek közös befogójára, $BH = x$ jelöléssel, fennáll

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2, \quad c^2 - x^2 = b^2 - (a \mp x)^2, \\ x = \pm \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

(az alsó előjelek akkor érvényesek, ha $CBA < > 90^\circ$).

Ezekből kivonással, H esetében BH irányát is figyelembe véve:

$$EG = BG - BE = \frac{(b-c)(b+c-a)}{2(b+c)}, \\ FH = BF \mp BH = \frac{(b-c)(b+c)}{2a}, \\ EF = BF - BE = \frac{b-c}{2}, \\ EH = BE \mp BH = \frac{(b-c)(b+c-a)}{2a},$$

és tüstént látjuk, hogy a felső két kifejezés szorzata egyenlő az alsó kettőével, az állítás helyes.

II. A hasonló összefüggések keresésében E helyén három külső érintő (hozzáírt) kör érintési pontja jön szóba, legyen ez a BC, BA, CA oldalhoz hozzáírt kör esetében rendre E^*, E', E'' . Közülük az első kör O^* középpontja ugyancsak az AG szögfelezőn van rajta, az utóbbiak O', O'' középpontja pedig a BAC szög külső szögeinek AG' felezőjén, tehát G -t csak az utóbbi két esetben pótoljuk G' -vel. Így a következő három összefüggés várható:

$$(1) \quad E^*G \cdot FH = E^*F \cdot E^*H, \quad E'G' \cdot FH = E'F \cdot E'H, \quad E''G' \cdot FH = E''F \cdot E''H.$$

A fentiekhez hasonlóan adódik, hogy új pontjaink sorrendje a BC egyenesen a következő: G', E', B és H a fentiek szerint, F, E^*, C, E'' , valamint hogy az új pontok B -től mért távolságának abszolút értéke:

$$BG' = \frac{ac}{b-c}, \quad BE' = \frac{b+c-a}{2}, \quad BE^* = \frac{a+b-c}{2}, \quad BE'' = \frac{a+b+c}{2}.$$

Ezek alapján a fentihez hasonló számítás mutatja, hogy az (1) egyenlőségek mindegyike helyes.