

Ha ismerjük három szakasz hosszainak kölcsönös nagyságviszonyát, akkor ezeknek csak egyetlen feltételt kell teljesíteniük ahhoz, hogy belőlük háromszöget szerkesztzhessünk: legnagyobbikuknak kisebbnek kell lennie a másik kettő összegénél (a többi egyenlőtlenség ebből már következik). Válasszuk esetünkben úgy a betűzést, hogy álljon

$$(1) \quad (0 <) a \leq b \leq c,$$

akkor az eredeti háromszög létezéséből következik:

$$(2) \quad c < a + b.$$

A számvonal pozitív oldalát az a , b , c számokat ábrázoló pontok legföljebb 4 részre osztják: 3 szakaszra és egy végtelen félegyenesre. Megmutatjuk, hogy bármelyik részben van is a d szám képe, az a_1 , b_1 , c_1 szakaszokból mindig lehet háromszöget szerkeszteni. Mindenekelőtt nyilvánvaló, hogy (1) és $d > 0$ alapján teljesül:

$$(0 <) a_1 \leq b_1 \leq c_1,$$

így azt kell belátnunk, hogy

$$(3) \quad c_1 < a_1 + b_1.$$

I. Ha mármost d képe az I. félegyenesen vagy a kezdőpontjában van, azaz $d \geq c$, akkor $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$, így pedig (3) azonos a (2)-vel.

II. ha $b \leq d < c$, akkor (2)-ben csak a bal oldal helyére írunk kisebbet, tehát teljesül.

III. Az $a \leq d < b$ esetben (2) így alakul: $d < a + d$, ami nyilvánvalóan teljesül.

IV. Végül $(0 <) d < a$ esetén a_1 , b_1 , c_1 egyenlő oldalú háromszög.

Amennyiben (1)-ben az első vagy a második jel-pár helyén egyenlőség áll, akkor a III., ill. II. szakasz hossza 0, az a része meggondolásunknak fölöslegessé válik. Ezzel megkaptuk a választ: az a_1 , b_1 , c_1 szakaszokból mindig szerkeszthető háromszög.

Kiss János (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. Tulajdonképpen nincs szükség az I–IV. esetek részletes vizsgálatára (3) bizonyításához: ha (3) jobb oldala megegyezik (2) jobb oldalával, akkor (3) igaz, mert a bal oldalán álló c_1 nem lehet nagyobb a (2) bal oldalán álló c -nél: ha (3) jobb oldala eltér (2) jobb oldalától, akkor a_1 , b_1 közül legalább az egyik d -vel egyenlő, ámde akkor $c_1 = d$ és így (3) nyilvánvalóan igaz.