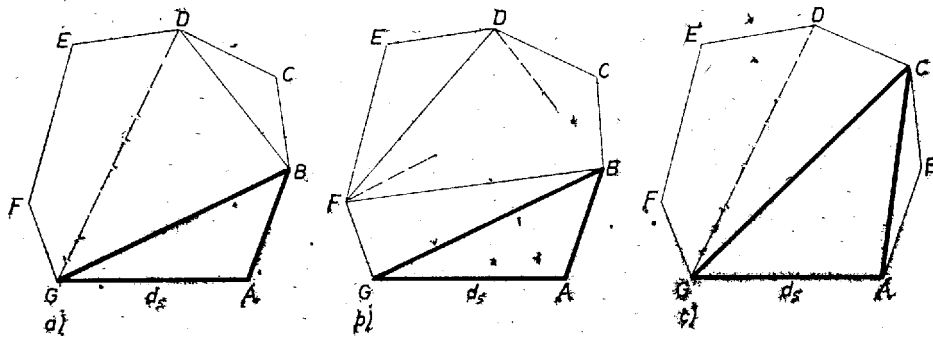


I. Legyen a végrehajtott felbontás háromszögeinek száma h , így oldalainak száma $3h$ (az átlókat mindkét oldalukon levő háromszögekben számítva), és a bennük levő szögek összege $h \cdot 180^\circ$. Minden ilyen szög azonos vagy a felbontandó sokszög valamelyik szögével – ti. akkor, ha ennek a szögnek a csúcsából egyetlen átlót sem húztunk meg –, vagy pedig a sokszög egy szögének egy részével, mert minden háromszög csúcsai a sokszög csúcsai közül valók, hiszen a berajzolt átlók belső pontjaiban nem keletkezhettek új csúcsok. Így $h \cdot 180^\circ$ egyenlő a sokszög $(n-2) 180^\circ$ -nyi szögösszegével, ahol n a sokszög oldalainak száma, ebből $h = n-2$, esetünkben $h = 10$, a megrajzolandó átlók száma pedig $(3h-12) : 2 = 9$, ugyanis a felbontó átlók 2-2 háromszöghöz tartoznak hozzá, a sokszög oldalai pedig csak 1-1 háromszöghöz.

Az előttünk álló S_{12} szabályos tizenkétszögnek 5-féle átlója van, ti. olyanok, amelyekkel a két partjukra jutó $12-2=10$ csúcs közül az egyik parton 1, 2, 3, 4, illetve 5 csúcs van; mondjuk rendre d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 típusúnak az ilyen átlókat. d_1 típusú átló legalább 2 lép föl bármely $n(\geq 5)$ oldalú sokszög háromszögekre való felbontásában, mert a sokszög n oldala legfőljebb $n-2$ háromszög között oszlik el, és ha egy háromszögbe két sokszöghoz tartozik, egyik végpontjuk szükségképpen közös, tehát a háromszög vele szemben levő oldala d_1 típusú átló.

Nem fordulhat elő viszont az előírt típusú felbontásban d_2 típusú átló, mert az ilyen által lemetezett négyszöget még tovább kellene bontanunk valamelyik – de csak az egyik – átlójával, és ezek bármelyikét megrajzolva, a d_2 egyik partjára esett 2 csúcs egyike 2, azaz páros számú háromszögbe tartoznék bele, a követelménnyel ellentétben.

Megmutatjuk, hogy nem rajzolhatunk be d_5 típusú átlót sem. Egy ilyen az S_{12} -t két hétszögre vágja, legyen egy ilyen $ABCDEFG$, ahol AG a d_5 típusú átló (1. ábra). Az ezt oldalként tartalmazó háromszög harmadik csúcsa nem lehet D , mert az AD átló d_2 típusú, így (a szimmetria alapján) elég B -t és C -t próbálni harmadik csúcsként.

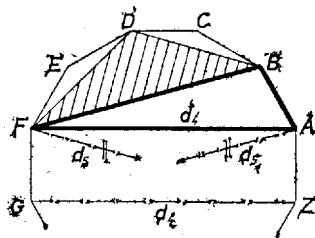


1. ábra

Ha BAG egy háromszög a felbontásnak, akkor B -ből még vagy 1 vagy 3 átló húzandó meg – hiszen a követelmény így is kimondható: amelyik csúcsból indul átló, onnan páros számú átlónak kell indulnia. Ámde 3 további átló nem húzható, mert köztük lenne BE , így csak BD -re és BF -re gondolhatunk (1. ábra a) és b) része). Az előbbi kényszerítően maga után vonná a kizárt GD -t, az utóbbi pedig FD -t, és ekkor a $BCDF$ négyszög egyik átlójával sem bontható.

Ha pedig a CAG háromszög oldalává tesszük meg AG -t (1. c) ábra), evvel C -ből már 2 átló indul ki, többet CF miatt nem húzhatunk, ekkor pedig a kizárt DG -re kényszerülnénk. Így valóban nem húzható d_5 típusú átló.

A d_4 átlók hatszöget metszenek le, egy ilyenben (2. ábra $ABCDEF$, a lemetező átló AF) a hétszög fenti esetéhez hasonlóan elég a BAF háromszöggel indulnunk.



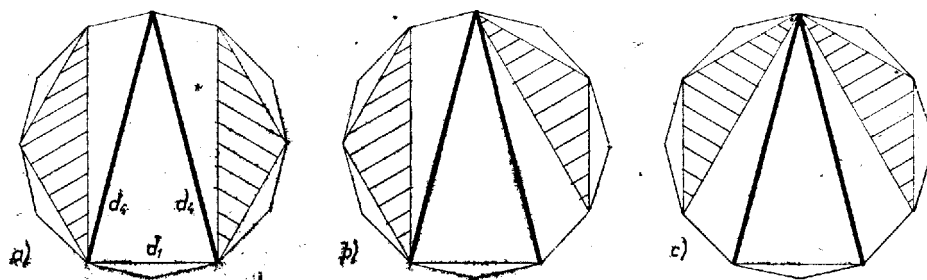
2. ábra

B -ből csak D -be, onnan pedig csak F -be mehet a második átló, ekkor a B, C, D, E csúcsok rendre 3, 1, 3, 1 háromszöghöz tartoznak, ez tehát megfelelő felbontás, a csatlakozó A, F csúcsokból pedig eddig páratlan számú átló indul ki.

Látni fogjuk, hogy d_3 típusú átlók is használhatók lesznek. Könnyen adódik a lemetezett csúcsok, valamint a lemetező átlók végpontjainál felhasznált csúcsok számából, hogy d_4 -ből legfőljebb 2-t rajzolhatunk, d_3 -ból 3-at, d_1 -ből pedig 6-ot.

II. Ezek alapján rátérve a próbálgatásokra, 2 db d_4 -es átló nem állhat külön végpontokkal (más szóval párhuzamosan, 2. ábra, AF és ZG), mert a köztük keletkező négyszög mindkét átlója d_5 típusú (másképpen: A -ból is, F -ből is kellene indítani átlót, hogy számuk párossá váljék). Ha viszont a 2 db d_4 átló egyik végpontja közös, akkor nem közös végpontjaikat d_1 átló köti össze, így a 3 végpontjuk mindegyikéből eddig 2-2 átló indul ki, és a d_4 -eseken kívül keletkező

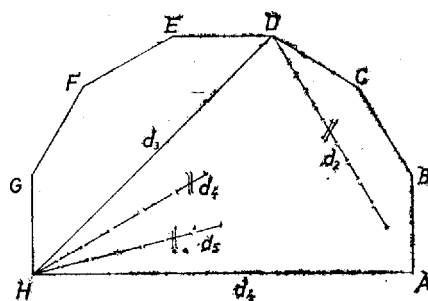
két hatszögbe – most már az Sz_{12} szimmetriát is tekintetbe véve – 3 lényegesen különböző módon másolhatjuk be a 2. ábra hatszögének (egyetlen lehetséges) felbontását (3. ábra *a*), *b*), *c*) része).



3. ábra

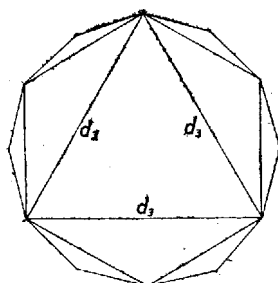
A szerepére először mindkettőben a 2 db d_4 -es átló közös csúcsát véve, majd e szerepet az egyik hatszögben, végül mindkettőben a d_4 -es átló nem-közös végpontjának átadva. Ezzel 3 különböző megoldását kaptuk feladatunknak.

Nem lehetséges olyan felbontás, melyben csak 1 db d_4 -es átlót engedünk meg, mert a másik oldalán keletkező nyolcszögben (4. ábra) az AH -t tartalmazó háromszög harmadik csúcsa B, C, D egyike sem lehet $HB = d_5$, $HC = d_4$ és $AD = d_2$ miatt.



4. ábra

d_4 -es átló nélküli felbontásban a 9 berajzolandó átló céljára igénybe kell vennünk a fent látott legnagyobb számokat, és a 3 db d_3 -as, 6 db d_1 -es átló csak egyféleképpen rajzolható be (5. ábra). – Mindezek szerint a kívánt felbontások száma 4.



5. ábra

Torma Tamás (Székesfehérvár, Petőfi S. Ált. Isk. 8. o. t.) dolgozata alapján, néhány kiegészítéssel

Megjegyzés. Az 1174. gyakorlatban¹ a szabályos 9 szögről bizonyítottuk, hogy ugyanezen követelmény szerint csak egyféleképpen háromszögelhető.

Az 1967. évi Kürschák-verseny 2. feladata annak bizonyítása volt,² hogy csúcsonként páratlan számú háromszöget tartalmazva azok a konvex sokszögek háromszögelhetők, amelyek oldalainak száma osztható 3-mal.

¹K. M. L. 37 (1968) 12. o.

²*Hajós György*: Az 1967. évi Kürschák József matematikai tanulmányverseny feladatainak megoldása. K. M. L. 36 (1968) 193–202. o. éleesebben 194.–197. o.