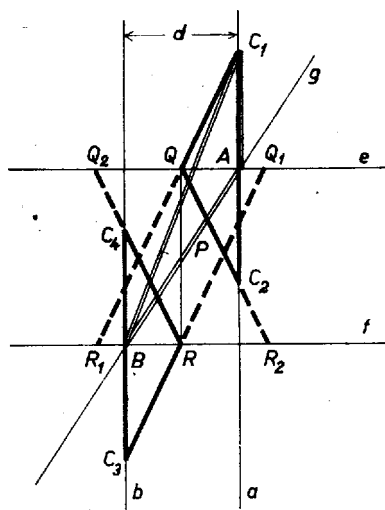


Jelöljük az adott egyeneseket e -vel és f -fel, az AB szakasz felezőpontja pedig legyen P , ez az AB szakasz mozgása során helyben marad. Mivel P felezi az AB szakaszt, egyenlő távolságra kell lennie e -től és f -től. A vizsgált háromszög A , B csúcsát egy tetszőleges, a P -n átmenő g egyenessel metszhetjük ki az e , f egyenesekből (1. ábra).

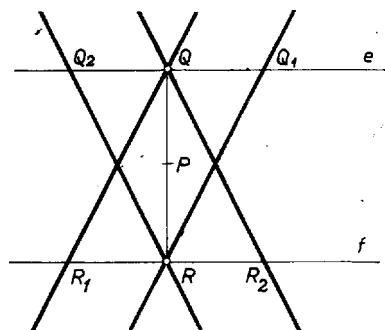


1. ábra

A háromszögnek az adott egyenesekre merőleges oldala vagy A -n, vagy B -n megy át, ennek megfelelően C , vagy az A -n átmenő, e -re merőleges a egyenesen, vagy a B -n átmenő, f -re merőleges b egyenesen van. A háromszögnek ehhez az oldalhoz tartozó magassága egyenlő az a , b egyenesek távolságával, d -vel. Ha C az a -n van, akkor $AC = d$, tehát C az A -tól d távolságra levő C_1 , C_2 pontok egyike lehet a -n, ha pedig C a b -n van, akkor hasonlóan kapjuk a B -től d távolságra levő lehetséges C_3 , C_4 pontokat. Ha tehát a g egyenest megválasztjuk, C -t négy pont közül választhatjuk. Kivételt képez az az eset, amikor g merőleges az adott egyenesekre, ekkor ugyanis $d = 0$, tehát nem jön létre megfelelő háromszög.

Legyen P vetülete e -n Q , f -en R , és tekintsük egy tetszőleges g egyenes mellett a fentiek szerint kapott AC_1Q háromszöget: ebben A -nál derékszög van, és $AQ = \frac{AC_1}{2} = \frac{d}{2}$. Jelöljük a QC_1 egyenes és f metszéspontját R_1 -gyel. Az R_1RQ , QAC_1 háromszögek hasonlóak, mert megfelelő szögeik egyenlőek, tehát $R_1R = QR/2 = PR$. A QC_1 egyenes tehát nem függ g megválasztásától.

Hasonlóan kapjuk, hogy QC_2 és f metszéspontja, R_2 továbbá RC_3 , illetve RC_4 és e metszéspontja, Q_1 , illetve Q_2 helyzete nem függ g választásától, ugyanis $RR_2 = QQ_1 = QQ_2 = PR$. A C pont tehát rajta van a QR_1 , QR_2 , RQ_1 , RQ_2 egyenesek egyikén (2. ábra).



2. ábra

Megmutatjuk, hogy a vizsgált mértani hely e négy egyenes együttese, kivéve belőle a Q és R pontokat. Legyen ugyanis C e négy egyenes valamelyikének Q -tól és R -től különböző pontja, legyen C mondjuk a QR_1 egyenesen. Legyen C vetülete e -n A , A -nak P -re vonatkozó tükörképe legyen B . Az AQC , RR_1Q háromszögek hasonlósága miatt $2AQ = AC$ és $2AQ$ egyenlő az ABC háromszög AC oldalához tartozó magasságával. Az ABC háromszög tehát elég tesz feladatunk követelményeinek.

Hasonlóan látható be állításunk helyessége, ha C a QR_2 egyenesen van; ha pedig C az RQ_1 vagy RQ_2 egyenesen van, akkor legyen B C vetülete f -en, A pedig B -nek P -re vonatkozó tükörképe, és fenti megfontolásunk ennek megfelelően megismételhető.