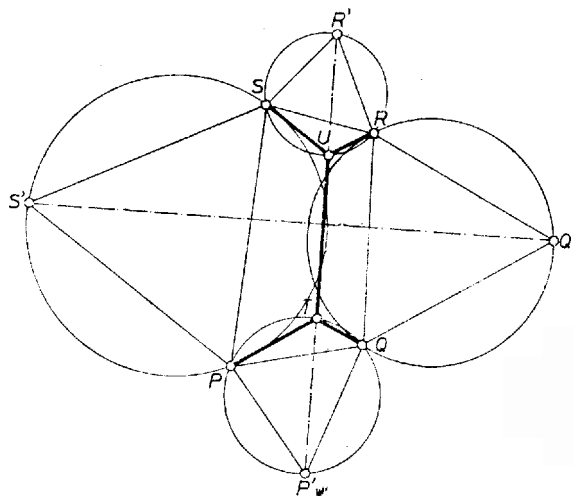


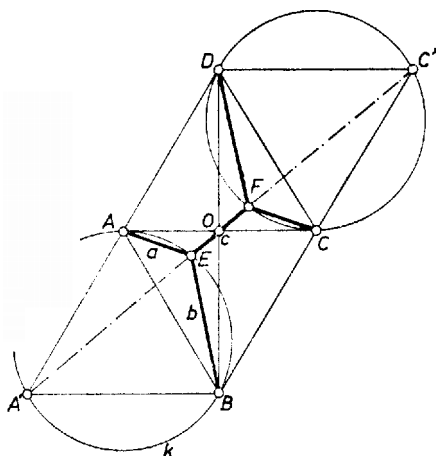
Az idézett helyen példát látunk arra (más betűzéssel), hogy ha a P, Q, R, S pontok egy konvex négyszög egymás utáni csúcsai, akkor hogyan állapítható meg a pontokat összekötő, minimális összhosszúságú útrendszer. A négyszög PQ, QR, RS, SP oldala fölé, kifelé szabályos háromszöget szerkesztünk, ezek új csúcsai rendre P', Q', R', S' (1. ábra).



1. ábra

Ekkor a mondott útrendszer összhossza egyenlő a $P'R'$ és $Q'S'$ távolságok kisebbikével. Ha ez $P'R' -$ azaz $P'R' \leq Q'S'$ –, akkor a minimális útrendszer két hármas csomópontját, T -t és U -t megadta a $P'R'$ szakasznak rendre a PQP' és az RSR' háromszög köré írt körrel való metszéspontja, és az útrendszer a PT, QT, UR, US egyenesszakaszokból áll. (Így ugyanis a szabályos háromszögre ismert tétel szerint – amennyiben a mondott körökben T a rövidebbik PQ íven, ill. U a rövidebbik RS íven adódik, fennáll $PT + QT = P'T$, ill. $RU + SU = R'U$; persze azt is figyelembe vettük, hogy $TP' \leq UP'$ volt.)

Ez az eredmény alkalmazható oázisaink pontnégyesére, és a megfelelően szerkeszthető $A'C'$ és $B'D'$ távolságok egyenlők, mert egymás tükörképei az $ABCD$ rombusz AC és BD átlóira; ezért az útrendszert elég $A'C'$ -ből kiindulva terveznünk (2. ábra).



2. ábra

Nyilvánvaló, hogy A' a DA , C' pedig a BC rombuszoldal meghosszabbításán van, és $DA' = BC' = 2AB$, tehát $A'BC'D'$ paralelogramma és $A'C'$ átlója átmegy a rombusz O középpontján. Az O -ra való tükrözés egymásba viszi át A -t és C -t, hasonlóan B -t és D -t, így az építési költség felosztásában A és C része egyenlő, hasonlóan B -é és D -é is, elég tehát megállapítanunk A és B hozzájárulásának arányát.

Legyen az ABA' és a CDC' körnek $A'C'$ -n levő pontja rendre E, F és jelöljük az $AE, BE, EF = 2EO$ szakasz hosszát rendre a -val, b -vel, c -vel. Így A egy lakója $(4a + 2b + 2c)$ utat tesz meg, ha egyszer-egyszer elmegy a másik 3 oázisba, B egy lakója pedig $2a + 4b + 2c$ utat.

Az OAA' háromszög hasonló az OEA háromszöghöz, mert O -nál levő szögük közös és A -nál, ill. E -nél 120° -os szögük van ($OAA' \angle = OAB \angle + BAA' \angle = 2 \cdot 60^\circ$ és $OEA \angle = 180^\circ - A'EA \angle = 180^\circ - A'BA \angle = 120^\circ$, hiszen $A'BEA$ húrnégyszög). És mivel e két háromszög egy pár megfelelő oldalára $AA' = AC = 2 \cdot AO$, azért a nagyítási arány $2 : 1$, tehát $EA = a = 2 \cdot EO = EF = c$. Hasonlók az OAA' és AEB háromszögek is, mert az utóbbiban

$\angle AEB = 180^\circ - \angle AA'B = 120^\circ$, és a B -nél levő szög ugyanazon az AE íven nyugszik, mint az $AA'E$ szög; ezért $b = EB = 2 \cdot EA = 2a$.

Ezek szerint A és B részesedési aránya $10a : 12a = 5 : 6$, A és C egyenként $5/22$ részt, $22,7\%$ -ot, B és D egyenként $6/22 = 3/11$ részt, $27,3\%$ -ot viselnek a költségekből.

Megjegyzések. 1. Az Ibrahim által javasolt útvonal hossza, mint könnyen kiszámítható, $15\sqrt{7} = 39,69$ km, valóban rövidebb a Hasszán által javasolt $15(1 + \sqrt{3}) = 40,98$ km-nél, méginkább az Ali-javasolta $3 \cdot 15 = 45$ km-nél. – Az érkezett megoldások kiszámították az összes részutak hosszát. Ez természetesen nem hiba – bizonyára elvégezték ezt a tervező mérnökök is –, de a *kérdés megválaszolásához* – mint láttuk – elkerülhető.

2. Könnyű belátni, hogy az EO , EA , EB útszakaszok egyszersmind megadják az O , A , B pontok közti, minimális összhosszúságú útvonalat is. Ez tehát abban az E pontban fut össze, ahonnan az OA , AB , BO szakaszok mindegyike 120° -os szögben látható. – Megemlítjük, hogy ha egy háromszög legnagyobb szöge nem éri el a 120° -ot, akkor mindig van ilyen pont a háromszög belsejében (szokás nevezni a háromszög *Torricelli*-féle pontjának). Ha viszont egy GHJ háromszögben a G -nél levő szög 120° -os, vagy nagyobb, akkor a minimális összhosszúságú útvonal a GH és GJ szakaszokból áll.

3. A bevezetésül idézett példa természetesen nem jelenti a problémának 4 pont esetére való teljes megoldását. Az 1. ábráról sejtjük, hogy $P'R'$ -nek P és Q között, valamint R és S között kell haladnia, másrészt a megfontolás érvényességének $P'T \leq P'U$ is feltétele.