

I. Első ránézésre látható, hogy ha $a = \varepsilon c$ és $b = \varepsilon d$, vagy ha $a = \varepsilon d$ és $a = \varepsilon c$, ahol $\varepsilon = 1$ vagy $\varepsilon = -1$, akkor a bal oldalon álló két tag (a műveleti mínuszjel nélkül) azonos egymással, tehát egyenletünknek minden valós szám gyöke. Ebben az esetben a feladat állítása nem igaz, ezért fel kell termünk, hogy a bal oldal két tagja nem azonosan egyenlő.

Szorozzuk össze az ismeretlent tartalmazó tényezőket, és a második tagot vigyük át a jobb oldalra:

$$(a+b)^2\{x^2 + x(c^2 + d^2) + c^2d^2\} = (c+d)^2\{x^2 + x(a^2 + b^2) + a^2b^2\}.$$

Vonjunk ki mindkét oldalból $x(a+b)^2(c+d)^2$ -t, ezzel elérjük, hogy az ismeretlent tartalmazó tényezők is teljes négyzetté válnak:

$$\begin{aligned}(a+b)^2\{x^2 - 2cdx + c^2d^2\} &= (c+d)^2\{x^2 - 2abx + a^2b^2\}, \\ (a+b)^2(x-cd)^2 &= (c+d)^2(x-ab)^2.\end{aligned}$$

Két szám négyzete akkor egyenlő, ha a számok egyenlőek, vagy egymás (-1) -szeresei. Ennek megfelelően két eset lehetséges:

$$\begin{aligned}(a+b)(x-cd)(c+d)(x-ab) & \qquad \qquad \qquad a) \\ (a+b)(x-cd) &= (-c-d)(x-ab), & b)\end{aligned}$$

illetve a két eset egybeolvad, ha $a+b = c+d = 0$. Ekkor (1)-ben nem lép föl x , a kérdés tárgytalan.

Mindkét esetben legfőbb elsőfokú egyenletet kaptunk x -re, így x – ha egyáltalán létezik – mindenesetre a négy alpművelettel számítható ki az a, b, c, d paraméterekből, amint feladatunk állítja.

II. Ami a gyök konkrét kifejezését illeti, a fenti két eset szerint rendre

$$\begin{aligned}x &= \frac{(a+b)cd - (c+d)ab}{(a+b) - (c+d)}, & \text{hacsak } a+b \neq c+d \text{ ill.} & a) \\ x &= \frac{(a+b)cd + (c+d)ab}{(a+b) + (c+d)}, & \text{hacsak } a+b \neq -(c+d). & b)\end{aligned}$$

A kizárt esetekben, amennyiben

$$(2) \qquad |a+b| = |c+d| \neq 0,$$

(1)-et ezek négyzetével egyszerűsítve x^2 is kiesik, és az egyetlen gyök

$$x = \frac{a^2b^2 - c^2d^2}{(c^2 + d^2) - (a^2 + b^2)},$$

racionális kifejezés. Ennek nevezője így is írható:

$$(c+d)^2 - 2cd - (a+b)^2 + 2ab = 2(ab - cd),$$

ami csak az $ab = cd$ esetben válik 0-vá – és akkor a számláló is 0, ez a feltétel azonban (2)-vel összekapcsolva csak a már eredetileg kizárt esetekben teljesül, hiszen két szám értékét összegük és szorzatuk egyértelműen meghatározza. Az $ab \neq cd$ esetben még egyszerűbben

$$x = \frac{ab + cd}{2}$$

(az alakítás nem érinti már belátott racionális voltát).

Filep János (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)