

Olyan kétjegyű $\overline{AB}$ (egész) számot keresünk, melyre alkalmas n mellett

$$\frac{1}{\overline{AB^n}} = 0,000\,00\,A\,B\,\dots$$

vagyis

$$\frac{10^7}{\overline{AB^n}} = \overline{AB}, \dots$$

A bal oldalon álló szám tehát $\overline{AB}$ és $\overline{AB} + 1$ között van. Jelöljük az $\overline{AB}$ számot x -szel, ekkor az

$$(1) \quad x \leq \frac{10^7}{x^n} < x + 1$$

egyenlőtlenségnek kell megkeresnünk az olyan megoldásait, amelyekben $10 < x \leq 99$, és x, n természetes számok. ($x = 10$ mellett $B = 0$ volna, amit a feladatunk kizárt.)

Szorozzuk meg (1)-et x^n -nel, és helyettesítsük be az x korlátait:

$$10^{n+1} < x^{n+1} \leq 10^7 < x^n(x+1) \leq 99^n \cdot 100 < 100^{n+1} = 10^{2(n+1)}.$$

Így csak olyan n -re van megoldás, amelyre

$$\begin{aligned} 10^{n+1} &< 10^7 < 10^{2(n+1)}, \\ n+1 &< 7 < 2(n+1), \\ 2,5 &< n < 6. \end{aligned}$$

(Felhasználtuk, hogy 10^n monoton függvénye az n -nek.) Ezek szerint n lehetséges értékei 3, 4, 5 – ezek mellett keresünk x -et.

Szorozzuk (1)-et x^n -nel, és vegyük mindkét oldal 10 alapú logaritmusát:

$$(2) \quad (n+1) \lg x \leq 7 < n \lg x + \lg(x+1) < (n+1) \lg(x+1),$$

$$\lg x \leq \frac{7}{n+1} < \lg(x+1).$$

Olyan egész x -eket keresünk, melyekre x és $x+1$ logaritmusai közrefogja a $\frac{7}{n+1}$ számokat $n = 3, 4, 5$ mellett. Ezek az alábbi táblázat alapján:

n	$\frac{7}{n+1}$	$\lg x$	x	$\lg(x+1)$	$n \lg x + \lg(x+1)$
3	1,75	1,7482	56	1,7559	7,0005
4	1,4	1,3979	25	1,4150	7,0066
5	1,1667	1,1461	14	1,1761	6,9066

Meghatároztuk $n \lg x + \lg(x+1)$ értékét is, hiszen (2) szerint ennek is nagyobbnak kell lennie, mint 7. Az első két esetben ez is teljesül. (Az első esetben felmerül a kérdés, hogy ezt nem csak a kerekítés okozza-e, de $\lg 56 > 1,7481$, $\lg 57 > 1,7558$ miatt $3 \lg 56 + \lg 57 > 7,0001$.) A harmadik esetben nem teljesül, tehát feladatunknak csak két megoldása lehet:

$$\begin{array}{lll} n_1 = 3, & A_1 = 5, & B_1 = 6; \\ n_2 = 4, & A_2 = 2, & B_2 = 5. \end{array}$$

Valóban,

$$\frac{1}{56^3} = 0,000\,005\,69\dots \quad \text{és}$$

$$\frac{1}{25^4} = 0,04^4 = 0,2^8 = 0,000\,002\,56.$$