

A bal oldal első tagját a hozzá hasonló jobb oldali tag mellé visszük, négyzetre emeljük az egyenletet és rendezünk:

$$\sqrt{(2a+b)^2 - 4x^2} = -b.$$

Eszerint megoldás létezésének egy szükséges feltételül máris kapjuk:

$$(2) \quad b \leq 0.$$

Újabb négyzetreemeléssel $x^2 = a^2 + ab$, és így megoldásként csak a következő két érték jön szóba:

$$(3) \quad x_1 = \sqrt{a(a+b)}, \quad x_2 = -\sqrt{a(a+b)},$$

amelyek csakis akkor valósak, ha a és $a+b$ egyenlő előjelűek, vagy ha fellép köztük a 0 érték is. Ezt (2)-vel egybefoglalva, $x_{1,2}$ valós, ha

$$(4) \quad a \geq a+b \geq 0, \text{ azaz } -a \leq b \leq 0;$$

vagy ha

$$(5) \quad a+b \leq a \leq 0, \text{ azaz } a \leq 0, b \leq 0.$$

Természetesen csak olyan megoldást fogadhatunk el, amely mellett az (1)-beli három négyzetgyökvonás külön-külön valós eredményre vezet. Tüstént látjuk, hogy ez (5) esetén nem teljesül, mert akár x_1 -et, akár x_2 -t helyettesítve, az első és a harmadik gyökkel közül legalább az egyik alatt negatív szám áll, kivéve ha $2a+b=0$, és $a(a+b)=0$, ami mindenképpen az $a=b=0$ esetre vezet. Ezt viszont a (4) feltétel is tartalmazza, így (5) esetét kizárhatjuk.

(4) esetén az első és a harmadik gyökkel alatt nemnegatív szám áll, hiszen 2-vel osztva őket, az a és $a+b$ nemnegatív számok számtani és mértani középértékéből képzett összeg és különbség áll előttünk. Ugyanígy a második gyökkel alatti szám sem negatív, ugyanis

$$\frac{10a+9b}{6} = \frac{a+9(a+b)}{6} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a}{3} + 3(a+b) \right\} \leq \sqrt{\frac{a}{3} \cdot 3(a+b)} = |x_{1,2}|.$$

Már csak azt kell vizsgálnunk, (3) melyike – és (4)-en túlmenve mely további feltétel mellett – elégíti ki (1)-et. x_1 -et véve, az első és harmadik négyzetgyökkel így alakul:

$$\begin{aligned} \sqrt{2a+b+2x_1} &= \sqrt{a+2\sqrt{a(a+b)}+(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{a+b}, \\ \sqrt{2a+b-2x_1} &= \sqrt{a}-\sqrt{a+b}, \end{aligned}$$

tehát a jobb oldalból a bal oldal első tagját kivonva mindenesetre

$$\sqrt{a}-3\sqrt{a+b}$$

adódik; a második négyzetgyök viszont

$$\sqrt{10a+9b-6x_1} = \sqrt{a-6\sqrt{a(a+b)}+9(a+b)} = \pm(\sqrt{a}-3\sqrt{a+b})$$

aszerint, hogy

$$(4a) \quad a \geq 9(a+b), \text{ azaz } b \leq -\frac{8}{9}a \leq 0, \quad \text{illetőleg}$$

$$(4b) \quad a < 9(a+b), \text{ azaz } -\frac{8}{9}a < b \leq 0.$$

Eszerint (4a) mellett teljesül (1), viszont (4b) mellett nem teljesül.

x_2 esetében az első és harmadik négyzetgyök szerepe fölcserélődik, csak a második négyzetgyökjelet kell újra számítani, ami hasonlóan

$$\sqrt{a}+3\sqrt{a+b},$$

és vele (1) teljesül.

Mindezek szerint a megoldás

$$\begin{aligned} -a < b \leq -\frac{8}{9}a < 0 \text{ esetén} & \quad x = \pm\sqrt{a(a+b)}, \\ -\frac{8}{9}a < b \leq 0 \text{ esetén} & \quad x = -\sqrt{a(a+b)}, \end{aligned}$$

$a \geq 0$, $a + b = 0$ esetén pedig $x = 0$, vagyis a megoldások száma a két feltétel szerint 2, 1, illetőleg 0.

Számpéldák:

$a = 16$, $b = -7$ esetén $x_1 = 12$ nem megoldás: $7 + 5 \neq 2$,

$$x_2 = -12 \text{ megoldás : } 1 + 13 = 14;$$

$a = 16$, $b = -15$ ($< -128/9$) esetén

$x_1 = 4$ is, $x_2 = -4$ is megoldás: $5 + 1 = 6$, $3 + 7 = 10$;

$a = 1$, $b = 3$ esetén sem $x_1 = 2$, sem $x_2 = -2$ nem gyök: $3 + 5 \neq 2$, $1 + 7 \neq 6$.

Szendrei Mária (Szeged, SÁgvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)