

Jelölje a három háromszög közös befogóját a , és legyen a középső háromszög másik befogója b , átfogója c . Mindháromra felírva Pitagorasz tételét:

$$(1) \quad a^2 + (b - 100)^2 = (c - 30)^2,$$

$$(2) \quad a^2 + b^2 = c^2,$$

$$(3) \quad a^2 + (b + 100)^2 = (c + 40)^2,$$

majd (2)-t (1)-ből és (3)-ból kivonva, elsőfokú rendszert kapunk b -re és c -re:

$$(4) \quad -100(2b - 100) = -30(2c - 30),$$

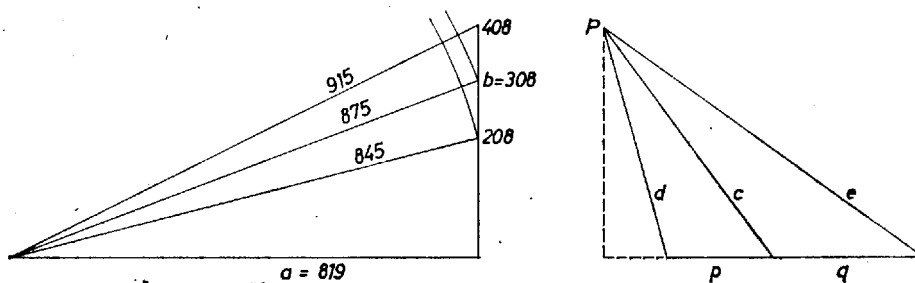
$$(5) \quad 100(2b + 100) = 40(2c + 40).$$

E két egyenletet összeadva:

$$2 \cdot 100^2 = 20c + 30^2 + 40^2,$$

$$c = 10 \cdot 100 - 45 - 80 = 875.$$

Ezt (4)-be, majd b és c értékét (2)-be helyettesítve kapjuk b és a értékét: $b = 308$, $a = 819$. A középső háromszög oldalai tehát: 819, 308, 875, a kisebb háromszög oldalai: 819, 208, 845, a nagyobbé: 819, 408, 915.



Megjegyzések. 1. Mivel mind a négy növekedési szám (100, 100, 30, 40) racionális szám, azért b -re és c -re racionális megoldást kellett kapnunk, a -ra azonban ez nem volt biztosra várható. A várhatóhoz képest mindhárom ismeretlenre tetszetősebb, egész érték adódott.

2. Általában, ha a másik befogók különbsége p és q , és a kisebb háromszög átfogója d , a nagyobbé e , akkor az (1)–(3) egyenletek megfelelői:

$$(1') \quad a^2 + (b - p)^2 = d^2,$$

$$(2') \quad a^2 + b^2 = c^2,$$

$$(3') \quad a^2 + (b + q)^2 = e^2,$$

(2')-t ismét kivonva (1')-ből és (3')-ból, kapjuk:

$$(4') \quad -2bp + p^2 = d^2 - c^2,$$

$$(5') \quad 2bq + q^2 = e^2 - c^2.$$

Ha $p \neq q$, akkor e két egyenlet összege helyett célszerűbb az első q -szorosához a második p -szeresét hozzáadni:

$$pq(p + q) = d^2q + e^2p - c^2(p + q).$$

Ez Stewart tétele, mely tehát egy egyenes egymáshoz csatlakozó p , q szakaszainak hossza, és a végpontoknak a külső P ponttól mért c , d , e távolságai közötti összefüggést határozza meg.

Fenti levezetésünk csak arra az esetre vonatkozik, ha P vetülete nem a szakaszokra esik, azonban hasonlóan bizonyítható akkor is, ha a vetület valamelyik szakaszon van.