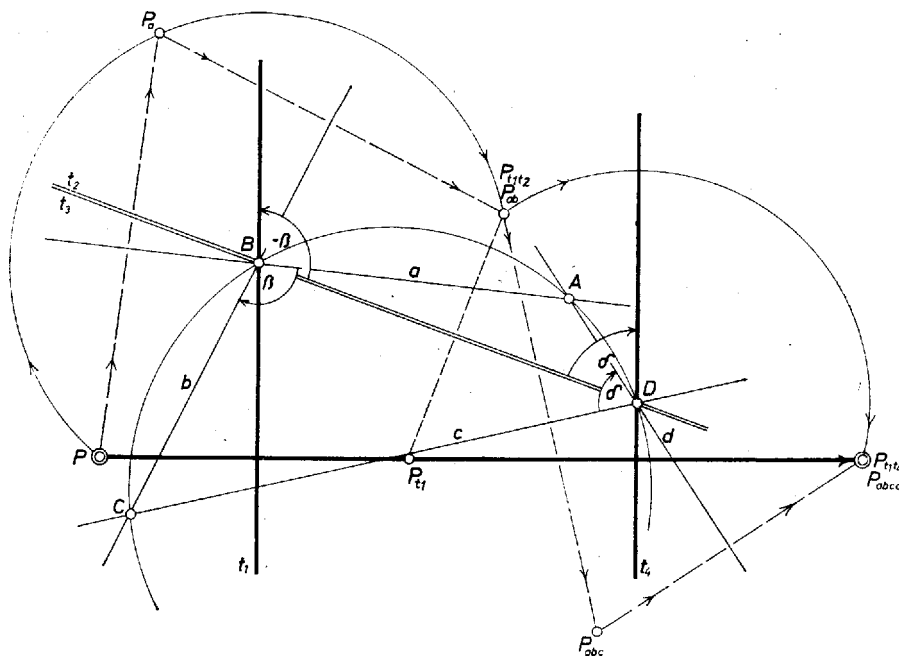


Föltehetjük, hogy az ABC háromszög pozitív körüljárású – hiszen az ellentétes esetben vehetnénk a kör és a pontok tengelyes tükörképét a sík valamely egyenesére (pl. a kör A -ból induló átmérőjére), az állítást igazolnánk a tükörképre, amely így már pozitív körüljárású, akkor pedig a visszatükrözéssel visszaadódó eredeti alakzatra is érvényes az állítás.

Ismeretes a tankönyvből, hogy a sík bármely alakzatát előbb az AB , majd a BC egyenesre mint tengelyre tükrözve, eredményül ugyanazt a helyzetét kapjuk az alakzatnak, mint ha azt elforgatjuk a B pont körül negatív irányban 2β szöggel, ahol β az ABC háromszög B -nél levő – azaz 180° -nál kisebb – szöge, amely a BA -t BC -be átvivő forgás szöge.

Hasonlóan a CD és DA egyeneseken – ebben a sorrendben – végrehajtott tükrözés eredménye egyezik annak az elfordításnak az eredményével, melynek centruma D , szöge 2δ – ahol δ a CDA háromszög D -nél levő szöge, és iránya megegyezik a DC szakaszt 180° -nál kisebb szöggel a DA -ra vivő elfordulás irányával. Ezek szerint e két elfordítás sorrend szerinti eredményéről kell kimutatnunk, hogy elérhető az eredeti alakzat egyetlen eltolásával.

A bizonyítást két esetben végezzük a D pontnak az AC egyeneshez képest elfoglalt helyzete szerint. Ha D a B -t nem tartalmazó partján van az AC egyenesnek (1. ábra) – más szóval ha $ABCD$ konvex négyszög –, akkor a húrnégyszög tulajdonságai alapján $\delta = 180^\circ - \beta$, a CDA háromszög is pozitív körüljárású, így a síkot előbb 2β , majd 2δ szöggel fordítjuk el negatív irányban, együttevén $2(\beta + \delta) = 360^\circ$ szöggel, tehát minden irány visszajut önmagába. (Az irányok szempontjából nem lényeges, hogy a két elfordítás centruma nem ugyanaz.)



1. ábra

Ha viszont D ugyanazon a partján van az AC egyenesnek, mint B – azaz $ABCD$ hurkolt húrnégyszög, akkor abszolút értékben $\delta = \beta$, viszont a DC -t DA -ba vivő (180° -nál kisebb) elfordítás ellentétes irányú a BA -t BC -be vivő elfordítással (hiszen egyenlő irányú a BC -t BA -ba vivő elfordítással). Így a B és D körüli elfordítás egyező nagyságú, de ellentétes irányú, tehát egymás utáni végrehajtásukkal ismét azt kapjuk, hogy a sík minden iránya visszajut önmagába. Így a két elfordítás eredménye valóban csak eltolás lehet, az állítást bebizonyítottuk.

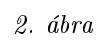
Vermes András (Eger, Gárdonyi G. Gimn.)

Megjegyzés. Könnyű megadni a kérdéses eltolás nagyságát és irányát is. Az alkalmazott tétel megfordításaként az is ismeretes a tankönyvből, hogy a sík egy E centrumú, ε szögű elfordítása felbontható két tükrözésre, melyek tengelyei átmennek E -n és az első tengelyt a másodikba $\varepsilon/2$ nagyságú elfordítás viszi át ugyanabban az irányban, mint a vizsgált elfordítás, továbbá hogy ebben a felbontásban a tengelyek egyikének iránya szabadon választható.

Jelöljük a B körüli, 2β szögű elfordítás, valamint a D körüli, 2δ szögű elfordítás ilyen felbontásában a tengelyeket a tükrözés sorrendjében t_1 -gyel és t_2 -vel, ill. t_3 -mal és t_4 -gyel, és válasszuk t_2 és t_3 szerepére egyaránt a BD egyenest. Ez kétféleképpen is egyszerűsíti a gondolt eljárást. Egyrészt a t_2 -n és t_3 -on való tükrözés „megsemmisítik egymást”, vagyis a t_3 -on való tükrözés visszaállítja a t_1 -en való tükrözés utáni helyzetet. Másrészt t_4 párhuzamos lesz t_1 -gyel, hiszen mindkettőt BD -ből kapjuk B körüli $(-\beta)$ szögű, illetve D körüli $(+\delta)$ szögű elfordítással, e szögek kapcsolatát pedig már a fentiekből ismerjük.

Mármost két párhuzamos tengelyen való egymás utáni tükrözés eredménye eltolás, melynek vektora merőleges a tengelyekre, az első tengelytől a második felé irányul és abszolút értéke 2-szer akkora, mint a tengelyek távolsága: ¹ $4r \sin \alpha \sin \beta$, ahol r a kör sugara és $\alpha = \angle DAB$, $\beta = \angle ABC$. (Az 1. ábra egy tetszőleges P pontra, a 2. ábra pedig a kör középpontjára bemutatja az egymás utáni tükrözéseket.)

¹Lásd a Gy. 1376. gyakorlat megoldását K. M. L. 45. (1972) 15.



2. ábra