

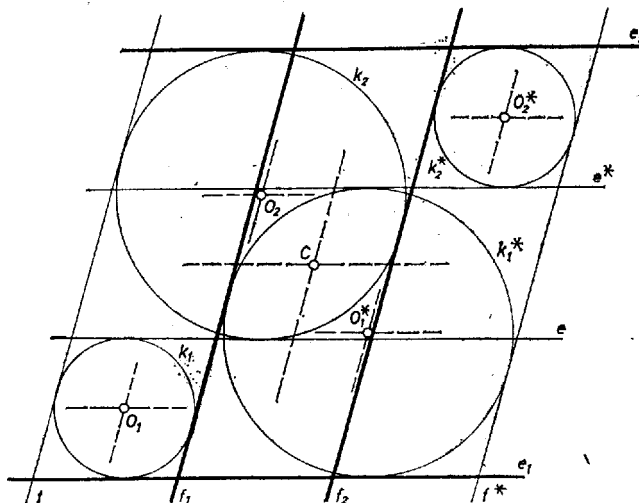
A négy egyenest az e_1, e_2, f_1, f_2 betűzéssel ellátva tekintjük adotttnak, és olyan k_i kört keresünk ($i = 1, 2$), mely érinti e_i -t és f_i -t, továbbá k_i -nek e_i -vel, f_i -vel párhuzamos másik érintője k_{3-i} -t (azaz a másik kört). Csak olyan helyzettel foglalkozunk, amelyben e_i és f_i nem párhuzamosak.

Bármely kör két egymással párhuzamos érintőjének távolsága egyenlő a kör átmérőjével. Így, ha e a két körre nézve *külső* közös érintő volt – más szóval, ha k_1 és k_2 az e -nek ugyanazon a partján voltak, tehát ugyanez állt e_1 -re és e_2 -re is –, akkor e_1 és e_2 távolsága megadja a körök (valamilyen sorrendben) $2R$ és $2r$ átmérőinek ($2R \geq 2r$) különbségét. Ha viszont e *belső* közös érintő volt, vagyis szétválasztotta k_1 -et és k_2 -t, tehát ugyanígy e_1 -et és e_2 -t is, akkor e_1 és e_2 távolsága az átmérők összegét adja meg. Ugyanezek érvényesek természetesen a f_1 és f_2 közti távolságra.

I. Ha mármost az e_1 és e_2 közti d_e és az f_1 és f_2 közti d_f távolság egymástól különböző, akkor nagyobbikuk $2(R + r)$ -rel, kisebbikük pedig $2(R - r)$ -rel egyenlő. Föltehetjük, hogy $d_e > d_f$ – hiszen ezt, ha kell, az e, f betűk fölcserélésével elérhetjük –, így R a $d_e + d_f$ távolságösszeg negyede, r pedig a $d_e - d_f$ különbség negyede. (Ha f_1 és f_2 egybeesnek, ez azt jelenti, hogy $R = r$.) Azt is kapjuk ebből, hogy az egymástól nagyobb távolságban haladó e_1 és e_2 a két kör egyik közös *belső* e érintőjével párhuzamosak, amely tehát köztük haladt, egyiküktől $2R$, másikuktól $2r$ távolságban, és így k_1 és k_2 középpontja egyaránt e_1 és e_2 között volt; a kisebb távolságú f_1 és f_2 pedig a körök egyik közös f *külső* érintőjével párhuzamosak, ez a közös érintő az f_1 és f_2 közti síksávon kívül haladt, a hozzá közelebbi f_i -től $2r$ távolságban.

Ezek alapján k_1 -nek O_1 középpontja rajta van egyrészt az e és e_1 közti, másrészt az f és f_1 közti síksáv szimmetriatengelyén, vagyis O_1 e két tengely metszéspontja; k_2 -nek O_2 középpontja pedig az e és e_2 , valamint f és f_2 közti síksávok szimmetriatengelyének metszéspontja, és ezzel maguk a körök is meg vannak határozva.

Az előbbieket alapján e -ként és f -ként egyaránt 2–2 egyenes jön szóba aszerint, hogy k_1 és k_2 közül melyiknek a sugara volt nagyobb. Így a feltételeket két k_1, k_2 körpár teljesíti, a megfelelő középpontok az 1. ábrán e és f -hez O_1 és O_2 – ekkor k_1 sugara kisebb –, továbbá e^* és f^* -hoz O_1^* és O_2^* .



A két megoldás egymás tükrös párja az e_1 és e_2 közti, valamint a f_1 és f_2 közti síksávok szimmetriatengelyeinek C metszéspontjára nézve.

Ezek szerint $d_e > d_f$ esetén csak akkor mondhatjuk, hogy az e_1, e_2, f_1, f_2 egyenesekből *visszaállítottuk a kiindulási köröket*, ha még azt is felhasználhatjuk, hogy k_1 és k_2 közül melyiknek a sugara volt nagyobb. A „visszaállítás” szót kissé lazábban értelmezve viszont ezt mondhatjuk: a két kör vagy k_1 és k_2 volt, vagy k_1^* és k_2^* , így a visszaállítás kétértelmű.

II. Amennyiben viszont a d_e és d_f távolságok egyenlők – más szóval e_1, e_2, f_1, f_2 egy rombusz oldalegyenesei –, úgy vagy $2(R - r)$ -re, vagy $2(R + r)$ -re két (egyező) adatunk van, a másikukra pedig nincs adatunk, ezért R, r és a körök nem határozhatók meg. Bármely r -et választva, található hozzá megfelelő R , így a kiindulási helyzet visszaállításáról még tágabb értelemben sem lehet szó.

Angyal József (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)