

I. megoldás. Legyen a tér tetszőleges O pontjából az $ABCD$ tetraéder csúcsaiba mutató helyvektor rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, így az ABC lap S_D súlypontjába mutató helyvektor

$$S_D = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3},$$

a további ABD , ACD , BCD lapok súlypontjába mutató helyvektor rendre

$$S_C = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}}{3}, \quad S_B = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{3}, \quad S_A = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{3},$$

a tetraéder S súlypontjának helyvektora pedig

$$S = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4} = \frac{S_D + S_C + S_B + S_A}{4}.$$

Legyen másrészt az ABC , ABD , ACD , BCD lap egy-egy tetszés szerinti D_1 , C_1 , B_1 , ill. A_1 pontjába az illető lap súlypontjából húzott vektor rendre $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{u}$, így a fölvett pontok helyvektora rendre

$$S_D + \mathbf{x}, \quad S_C + \mathbf{y}, \quad S_B + \mathbf{z}, \quad S_A + \mathbf{u},$$

a megfelelő lapsúlypontra vett D'_1 , C'_1 , B'_1 , ill. A'_1 tükörképük helyvektora pedig rendre

$$S_D - \mathbf{x}, \quad S_C - \mathbf{y}, \quad S_B - \mathbf{z}, \quad S_A - \mathbf{u}$$

lesz. Továbbá a fölvett, illetőleg a tükrözéssel kapott pontnégyes súlypontjának helyvektora, mindjárt alkalmas rendezéssel

$$S_1 = \frac{S_D + S_C + S_B + S_A}{4} + \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} + \mathbf{u}}{4} = \mathbf{s} + \mathbf{v},$$

ahol $\mathbf{v}$ a bal oldal második tagját rövidíti, illetőleg

$$\mathbf{s}'_1 = \mathbf{s} - \mathbf{v}.$$

Innen

$$\frac{\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}'_1}{2} = \mathbf{s},$$

ami az állítást bizonyítja.

A bizonyításban nem használtuk ki, hogy a fölvett pontok rendre benne vannak a mondott lap síkjában, így az állítás ezen korlátozás nélkül érvényes.

Kirchner Imre (Budapest, Steinmetz M. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Általában az $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ helyvektorú $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontok $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ súlyrendszerre vonatkozó súlypontjának a tér

$$\mathbf{r} = \frac{\alpha_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{r}_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

helyvektorú P pontját nevezzük. (Az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ súlyok tetszőleges valós számok lehetnek, melyek összege 0-tól különböző.) E definícióból következik, hogy a $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontoknak a $c\alpha_1, c\alpha_2, \dots, c\alpha_n$ súlyrendszerre vonatkozó súlypontja ugyanaz, mint e pontok $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ súlyrendszerre vonatkozó súlypontja, ha $c \neq 0$. Igaz továbbá, hogy ha a $P_1, P_2, \dots, P_k$ pontokat ($k \leq n$) az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ súlyrendszerre vonatkozó P' súlypontjukkal helyettesítjük, melyhez az $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k)$ súlyt rendeljük, a súlypont változatlan marad, hiszen a helyvektorok $(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$ -szerese egyenlő:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k) \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k} + \alpha_{k+1}\mathbf{r}_{k+1} + \dots + \alpha_n\mathbf{r}_n &= \\ &= \alpha_1\mathbf{r}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{r}_n \end{aligned}$$

(feltéve, hogy $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \neq 0$).

Ezek alapján feladatunk megoldása a következő. A $ABCD$ tetraéder szokásos értelemben vett súlypontja azonos az $(1, 1, 1, 1)$ súlyrendszerre vett súlyponttal vagy a $(3, 3, 3, 3)$ súlyrendszerre vett súlyponttal. Utóbbi megkapható úgy is, hogy laponként képezzük a lapok csúcspontjainak $(1, 1, 1)$ súlyrendszerre vonatkozó súlypontját, majd a kapott pontoknak (a lapok közös selysúlypontjának) vesszük a $(3, 3, 3, 3)$ súlyrendszerre vonatkozó súlypontját. Az $ABCD$ és a $S_AS_BS_CS_D$ tetraéderek S súlypontja tehát azonos.

Az $A_1, B_1, C_1, D_1, A'_1, B'_1, C'_1, D'_1$ pontrendszer $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ súlyrendszer melletti súlypontját is kétféleképpen határozzuk meg. Először vesszük az $A_1B_1C_1D_1$, illetve $A'_1B'_1C'_1D'_1$ pontnégyes $(1, 1, 1, 1)$ súlyrendszer melletti súlypontját, kapjuk az S_1, S'_1 pontokat, majd vesszük az S_1, S'_1 pontok $(4, 4)$ súlyrendszer melletti súlypontját, ez az $S_1S'_1$ szakasz felezőpontja. De képezhetjük először az (A_1, A'_1) , (B_1, B'_1) , (C_1, C'_1) és (D_1, D'_1) pontpárok $(1, 1)$ súlyrendszer melletti súlypontját, kapjuk az S_A, S_B, S_C, S_D pontokat, majd ezeknek vesszük a $(2, 2, 2, 2)$ súlyrendszerre vonatkozó súlypontját, ami az $S_AS_BS_CS_D$ tetraéder S súlypontjával azonos. S tehát az $S_1S'_1$ szakasz felezőpontja, amint azt bizonyítani akartuk.