

I. megoldás. Csak akkor foglalkozhatunk a kérdéssel, ha a gyökök valósak, vagyis $b^2 - 4c \geq 0$. A követelmény alapján az x_1 -gyel jelölt gyök b -vel is, c -vel is kifejezhető a másodfokú egyenlet együtthatói és a gyökök közti ismert összefüggéseket felhasználva, így tehát a keresett összefüggést az a követelmény adja meg, hogy a két kifejezésnek egyenlőnek kell lennie.

Mivel itt a négyzetes tag együtthatója $a = 1$, azért a kívánt kapcsolat figyelembevételével

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= x_1 - x_1^2 = -b, \\x_1 x_2 &= -x_1^3 = c.\end{aligned}$$

Az utóbbiból

$$x_1 = \sqrt[3]{-c},$$

és ezt az elsőbe helyettesítve a keresett összefüggés, alkalmas rendezéssel

$$(1) \quad \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{c^2} = b \quad (\text{és } b^2 - 4c \geq 0).$$

Adott esetben a feltétel teljesülése kényelmesebben ellenőrizhető gyökjelmentes alakban. Köbreemeléssel és (1)-et ismét figyelembe véve ilyen alakot kapunk:

$$c + 3c(\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{c^2}) + c^2 = c + 3bc + c^2 = b^3,$$

átrendezve

$$(2) \quad b^3 - 3bc - c^2 - c = 0.$$

Megjegyzések. 1. Az (1) és (2) föltétel nemcsak szükséges (hiszen a követelmény teljesüléséből indultunk ki), hanem elegendő is. Ha ugyanis (2)-be beírjuk a

$$b = -(x_1 + x_2) \quad c = x_1 x_2$$

összefüggéseket, szorzattá alakítással adódik

$$x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 = (x_1^2 + x_2)(x_1 + x_2^2) = 0,$$

eszerint

$$\text{vagy } x_1^2 + x_2 = 0, \quad \text{vagy } x_2^2 + x_1 = 0,$$

tehát a követelmény teljesül.

Balogh Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn., II. o. t.)

Füredi Zoltán (Budapest, Móricz Zs. Gimn., II. o. t.)

2. A kívánt kapcsolatot felmutató egyenletre konkrét számpéldát természetesen nem (1) vagy (2) alapján írunk föl, hanem x_1 megválasztásával. Legyen pl. $x_1 = 1/2$, ekkor $x_2 = -1/4$, és az a másodfokú egyenlet, melynek e két szám a gyöke:

$$(x - 1/2)(x + 1/4) = x^2 - x/2 - 1/8 = 0$$

és a $b = -1/2$, $c = -1/8$ értékpár valóban teljesíti (1)-et.

II. megoldás. Jelölje ε a $+1$ és -1 számok egyikét, ekkor

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(-b - \varepsilon \sqrt{b^2 - 4c} \right), \quad x_2 = \frac{1}{2} \left(-b + \varepsilon \sqrt{b^2 - 4c} \right)$$

és ha a követelmény teljesül, akkor

$$\frac{1}{4} \left(-b + \varepsilon \sqrt{b^2 - 4c} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(b + \varepsilon \sqrt{b^2 - 4c} \right),$$

(3)

kifejtve

$$b^2 - b - 2c = \varepsilon(b + 1) \sqrt{b^2 - 4c},$$

amiből négyzetreemeléssel (amikor mindenesetre $\varepsilon^2 = 1$), rendezéssel ismét a fenti (2) föltételre jutunk.

Szekeres Vince (Komárno, Ált. Középisk., II. o. t.)

Megjegyzés. ε -nak a számításból való „kiesés” természetesen nem azt jelenti, hogy (3) az ε bármelyik értékével teljesül, hanem hogy valamelyik értékével.