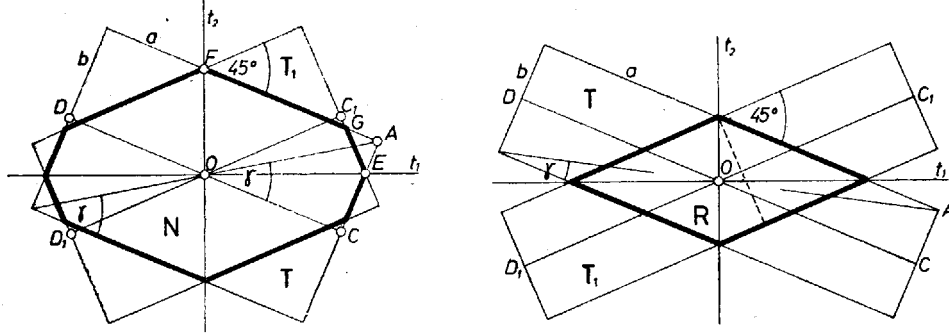


I. Legyen a két téglalap T és T_1 , közös középpontjuk O , oldalaik hossza a és b , ahol $a \geq b$. T_1 mindegyik oldala 45° szöggel hajlik T mindegyik oldalához, így a két idom a hosszúságú CD és C_1D_1 oldalfelezői (hossztengelyei) is 45° szöget zárnak be ($\angle COC_1 = 45^\circ$, $\angle C_1OD = 135^\circ$), és a T -ből és T_1 -ből álló X alakzat szimmetrikus az ezek közti szögek t_1 , t_2 felezőire, mint tengelyekre nézve.



Ezeket tükrözve T és T_1 egymásba mennek át, CD a C_1D_1 -be, ill. D_1C_1 -be. Legyen még T -nek a COC_1 , szögtartományban ($a = b$ esetén az OC_1 száron) levő csúcsa A . Így T és T_1 , közös része egy N nyolcszög vagy egy R rombusz aszerint, hogy CA nagyobb C_1A -nál vagy nem (egyenlőségük esetén A a rombusz egyik csúcsa); mondhatjuk így is: a közös rész nyolcszög, ha $\angle AOC > 45^\circ/2 = 22,5^\circ$, különben rombusz. Az X által (egyszeresen) lefedett terület pedig $2ab - N$, ill. $2ab - R$, ahol N , R az illető idom területét is jelöli.

II. Az első esetben T -nek A -ból induló, b hosszúságú oldala t_1 -en metszi T_1 nek b hosszúságú oldalát az E pontban, az a hosszúságú oldalát pedig t_2 -n az F pontban és még egyszer G -ben. Ekkor X -et úgy kapjuk, hogy T -hez hozzáveszünk két-két GE , ill. GF átfogójú, egyenlő szárú, derékszögű háromszöget (hiszen N egyenlő T és a 4 háromszög területének különbségével).

A két átfogó hossza kiszámítható a következő egyenletrendszerből:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot GE + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) GF &= a, \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) GE + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot GF &= b \end{aligned}$$

(a és b mindegyike tartalmazza a kétféle háromszög egy-egy befogóját, továbbá egyet-egyét az átfogók közül), és pedig

$$GE = \frac{1}{\sqrt{2}}(b - (\sqrt{2} - 1)a), \quad GF = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - (\sqrt{2} - 1)b),$$

ahonnan a 4 háromszög területének összege

$$2 \left(\frac{GE^2}{4} + \frac{GF^2}{4} \right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) (a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab),$$

és ezt ab -vel növelve az X alakzat területe

$$X_1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) (a + b)^2.$$

Eredményünk addig érvényes, amíg $GE \geq 0$, azaz $b/a \geq \sqrt{2} - 1$ (és persze $b/a \leq 1$). Ez a korlát éppen $\tan(45^\circ/2)$, vagyis azt kívánja, hogy a T átlója és hossz tengelye közti γ szög ne legyen kisebb $22,5^\circ$ -nál, amit az ábra szemléletéből is kiolvastunk. (GF viszont mindig pozitív).

A második esetben R oldala egyenlő a b befogójú, egyenlő szárú, derékszögű háromszög átfogójával, magassága pedig maga b , így az alakzat területe

$$X_2 = 2ab - \sqrt{2}b^2,$$

hacsak

$$\frac{b}{a} \leq \sqrt{2} - 1 = \tan 22,5^\circ, \quad \text{azaz ha } \angle AOC \leq 22,5^\circ.$$

III. Vizsgáljuk X és T területének q arányát, mint az oldalak $b/a = r$ arányának függvényét, míg r az 1-től $\sqrt{2} - 1$ -ig; majd tovább 0-ig csökken (azonban $r > 0$), más szóval T és T_1 szélességét egyre csökkentve, hosszúságukat állandóan tartva.

Az első intervallumban

$$(1) \quad q = \frac{X_1}{ab} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{b}{a} + 2 + \frac{a}{b}\right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(r + \frac{1}{r} + 2\right),$$

és itt r csökkentésével a második tényező változó része monoton nő. Ha ugyanis $\sqrt{2} - 1 \leq r_2 < r_1 \leq 1$, akkor

$$\left(r_2 + \frac{1}{r_2}\right) - \left(r_1 + \frac{1}{r_1}\right) = (r_1 - r_2) \left(\frac{1}{r_1 r_2} - 1\right) > 0,$$

mert mindkét tényezője pozitív. Így első kérdésünk szempontjából csak az $r = \sqrt{2} - 1$ értékhez tartozó $q = \sqrt{2}$ értékre van szükségünk. A második kérdés céljára az $r = 1$ -hez tartozó (lehető legkisebb) érték: $q = 4 - 2\sqrt{2} (= 1,172)$.

A $0 < r \leq \sqrt{2} - 1$ intervallumban pedig

$$(2) \quad q = \frac{X_2}{ab} = 2 - \sqrt{2}r,$$

r csökkenésével ez is monoton nő, $r = \sqrt{2} - 1$ esetén $q = \sqrt{2}$; másrészt minden r -re $q < 2$. Azaz q -nak nincs legnagyobb értéke, de bármilyen kicsi pozitív szám ε , van olyan b/a arány, amelyre $q > 2 - \varepsilon$ (természetesen $\varepsilon < 2 - \sqrt{2}$).

IV. Az eddigiek szerint q értéke – hacsak $q \geq 4 - 2\sqrt{2}$ – egyértelműen meghatározza T oldalainak r arányát, éspedig

$$4 - 2\sqrt{2} \leq q < \sqrt{2}$$

esetén az (1)-ből adódó

$$r + \frac{1}{r} + 2 - (2 + \sqrt{2})q = 0$$

másodfokú egyenlet $\sqrt{2} - 1$ és 1 közti gyöke lesz az arány (tudjuk, hogy van ilyen gyök és csak egy, mert a másik gyök ennek reciproka, tehát > 1), továbbá

$$\sqrt{2} \leq q < 2$$

esetén pedig (2)-ből

$$r = \frac{2 - q}{\sqrt{2}}.$$

Turán György (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)
Kovalcsik András (Balassagyarmat, Balassi B. Gimn., II. o. t.)