

A nevező két tagjában a két-két tényező mindegyike nemnegatív, és csak $a = b = 0$ esetén válik 0-vá. Ez az egyetlen olyan a, b értékpár, amely mellett a kifejezés nincs értelmezve, ezt kizárjuk.

A nevező alábbi alakjában:

$$N = (a^2 + b^2)(a^2 + ab + b^2) + (a^2 + b^2)ab + a^2b^2$$

a 2. és 3. tag közös tényezőjét kiemelve a zárójelben az 1. tag 2. tényezője adódik, így

$$N = (a^2 + ab + b^2)^2.$$

Itt a zárójelbeli kifejezés tovább nem alakítható szorzattá, mert láttuk, hogy csak akkor 0, ha $a = b = 0$, ha pedig két (elsőfokú) tényező szorzataként volna írható, akkor mindegyik tényezőhöz volna olyan a, b értékpár, amely mellett annak a tényezőnek az értéke 0 volna, és így a szorzat is eltűnne.

Ezek szerint a tört csak $M = a^2 + ab + b^2$ -tel vagy magával $N = M^2$ -tel lehet egyszerűsíthető. Próbát téve a könnyű számításra vezető $a = 2, b = 1$ értékpárral, $M = 7$, a számláló pedig $9 \cdot 27 + 2 \cdot 8 = 259 = 7 \cdot 37$, ez sejteni engedi, hogy egyszerűsíthetünk M -mel. M^2 -vel viszont nem várható, hogy egyszerűsíthessünk, hiszen $7 \cdot 37$ nem osztható 7^2 -tel.

A számláló kifejtése és kellő átcsoportosítása igazolja sejtésünket:

$$\begin{aligned} a^6 + 3a^5b + 3a^4b^2 + 4a^3b^3 + 3a^2b^4 + 3ab^5 + b^6 &= \\ &= (a^6 + a^5b + a^4b^2) + 2(a^5b + a^4b^2 + a^3b^3) + \\ &+ 2(a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5) + (a^2b^4 + ab^5 + b^6) = \\ &= M(a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4), \end{aligned}$$

az új zárójelből viszont már nem emelhető ki M , mert így alakítható:

$$(a^2 + ab + b^2)^2 - 3a^2b^2 = M^2 - 3a^2b^2,$$

és itt a 2. tag nem osztható M -mel. Ezek szerint a tört egyszerűsített alakja:

$$\frac{a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4}{a^2 + ab + b^2}$$

Szeredi János (Budapest, II. Rákóczi F. Gimn., II. o. t.)

Kiss György (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Könnyen adódnak a szorzattá alakítások abból az észrevételből is, hogy a kifejezés értéke nem változik, ha a -t és b -t fölcseréljük. Ilyen esetekben célszerű új változóknak venni az eredeti változók $a + b = s$ összegét és $ab = p$ szorzatát. Ezekkel a nevező

$$N = (s^2 - 2p)s^2 + p^2 = s^4 - 2ps^2 + p^2 = (s^2 - p)^2 = (a^2 + ab + b^2)^2,$$

a számláló pedig

$$\begin{aligned} (s^2 - 3p)s^4 + 2p^3 &= s^6 - 3s^4p + 2p^3 = s^4(s^2 - p) - 2p(s^4 - p^2) = \\ &= (s^2 - p)\{s^4 - 2p(s^2 + p)\}. \end{aligned}$$