

α) Mindegyik lapközéppontból 4 másikba vezet zsineg. Kézenfekvő a zsineg felrakása időbeli lefolyásának megfelelően a csomag 6 lapja oldalfelezőpárjai által alkotott hálózat időbeli *bejárásáról* beszélni egyelőre – így mindegyik csomópontba 2-szer érkezünk és 2-szer távozzunk belőle, és 12 szakasz után (szakaszon egy csomótól a legközelebbi csomóig terjedő darabot értve) csatlakozunk a kiinduláshoz. Megjegyezzük azonban, hogy a feladat a *befejezett*, különböző körülkötések számát kérdezi; s mivel a felrakott zsinegen sem a használt menetirány, sem a kezdő- és végpont nem állapítható meg, azért tulajdonképpen egy bejárásnak és a megfordítottjának közös út vonala ad egy körülkötözési lehetőséget. (A zsinegvéget összekötő csomó helyzetét ugyanis figyelmen kívül kell hagynunk, hiszen megbontaná a szimmetriát, márpedig nyilvánvalóan a több-kevesebb szimmetriára utal a háromféle csomag külön vizsgálata; e nélkül nem volna értelme vizsgálni a más-más alakú csomagokat.)

Ábráinkon két egymás után vett csomópont között egyenesre kifeszítettnek rajzoltuk a zsineget, vagyis tulajdonképpen a kocka 6 lapközéppontja által meghatározott szabályos oktaéder élvázát, illetőleg ennek egy-, majd két iránynyújtását járjuk be az elgondolt hálózat helyett, mind a 12 élen egyszer végighaladva és minden csúcson kanyarodva. Ezzel a bejárások száma nem változik meg. Jobb áttekintés érdekében az egyes csomókon való 2–2 kanyarodó áthaladást csak egymás közelében vezettük el, a kanyart legömbölyítve; eszerint attól is eltekintünk, hogy a két zsinegrész hogyan halad egymáshoz képest alul és fölül, egymást feszítve, – hiszen ennek figyelembevétele is megszüntetné a szimmetriát.¹

A bejárás kanyarulatait j és b betűkkel írjuk le aszerint, hogy az egymás utáni csomópontokban jobbra, ill. balra fordultunk. Bármelyik csomón először való áthaladásban ezt még megválaszthatjuk, a második érkezés után azonban az egyetlen, még nem használt élen, ún. „kényszerlépéssel” kell továbbhaladnunk.

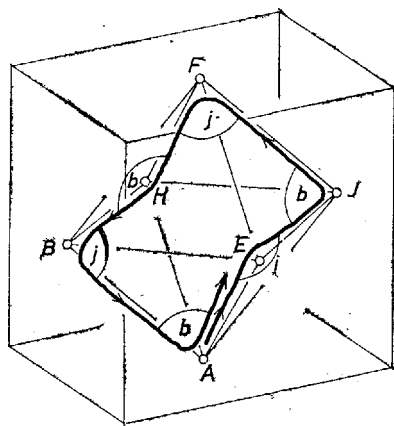
Ábráinkon a kockát csak valamilyen állásban mutathatjuk be, lapjait, ill. az oktaéder csúcsait ennek megfelelően az „alsó, felső, bal, jobb, elülső, hátulsó” szavak kezdőbetűjével jelöljük. Helyzetük azonban lényegtelen, hiszen a csomagot a kötés folyamán természetesen forgatjuk, másrészt a szimmetria miatt rá sem tudunk ismerni, hogy egy lap, él, csúcshová mozdult el korábbi helyzetéhez képest.

A tervezett leírásban nem állhat egymás után három egyező betű, mert így a teljes bejárás előtt visszakanyarodnánk egy már bejárt élre (zsinegrészre), pl. az A alsó csúcsból az E elülső csúcshoz felé indulva, és mindig jobbra kanyarodva, az első j -vel a J jobb oldali csúcshoz, a másodikkal ismét A -ba, a harmadikkal pedig ismét az AE élre jutnánk. Hasonlóan akkor is csak részbejárást teljesítenénk, 6 él után záródva, ha a j és b kanyarokat állandóan egyesével váltakoztatnánk (1. ábra, kocka esetére):

csúcsok: $(A), E, J, F, H, B, A, E, \dots$

irány: $j, b, j, b, j, b,$

ahol F a felső, H a hátsó, B a bal oldali csúcsa az oktaédernek. (Az ábrák szemléltetéséhez megjegyezzük, hogy a kocka, az oktaéder hátsó lapjain – természetesen a külső oldalukon – végrehajtott jobbrakanyarodás balnak látszik és viszont, hiszen felénk e lapoknak a belső oldala van fordulva.)



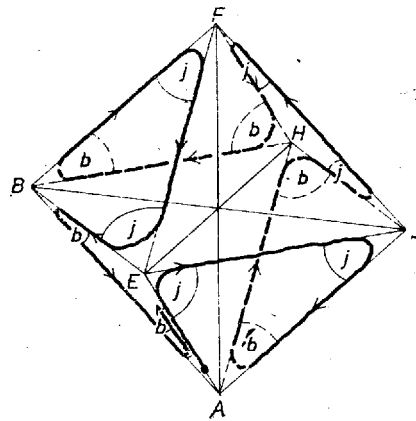
1. ábra

Ezek szerint minden, az előírás szerinti körülkötözés (12 tagú) leírásában van – és pedig legalább 2 helyen – két szomszédos, egyező betű, két ellentétes betű által közrefogva. Válasszuk úgy a menetirányt, hogy az egyik ilyen $bjjb$ legyen. Ennek folytatási lehetőségeit tekintjük. Az előbbieken alapján a következő kanyar vagy b vagy j lesz, és az első folytatáshoz mindjárt két továbbfolytatást is leírhatunk:

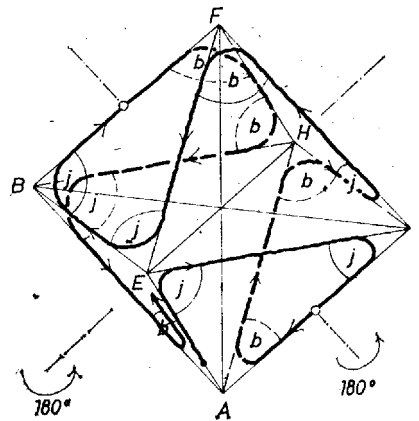
$$b, j, j, b, \mathbf{b}, j, \begin{cases} b, j, j, b, b, j, \mathbf{j}, b, \dots \\ b, j, j, b, b, j, \mathbf{b}, \dots \end{cases} \quad b, j, j, b, \mathbf{j}, \dots$$

Az első kettőt a 2. és a 3. ábra mutatja abban az elhelyezésben, hogy az első j kanyar előtti lépés ismét AE (vagyis a kezdő b kanyar BAE).

¹ Azoknak az olvasóknak, akik itt először foglalkoznak a kérdéssel, ajánljuk a minél többféle szemléletet: kocka, ill. hasábmódellen (több egyforma darabot célszerű venni), szétnyitható papírmódellen, drótból hajlított élvázmodellen. (Szerk.)



2. ábra



3. ábra

Az eddig bejárt útvonal:

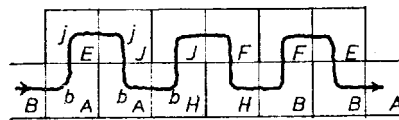
(B) $AEJ AHJ FHB$, ill. (B) $AEJ AHJ FE$,

mindkét esetben egyértelművé teszi a befejezést, mert B -t kivéve már mindegyik csúcson legalább egyszer áthaladtunk és B -ből az első úttal nem kanyarodhatunk A felé, különben idő előtt záródna a bejárás. A záródásban is teljesül a követelmény és az útvonal ismételhető. Ez mutatja, hogy az útvonalat a 12 lépés bármelyikénél kezdve ugyanazt a kötözést kapjuk. A kanyarok egymásutánja, E -től kezdve

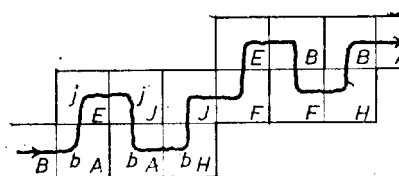
(I) a 2. ábrán: $j, j, b, b, j, j, b, b, j, j, b, b$;

(II) a 3. ábrán: $j, j, b, b, j, b, j, j, b, b, j, b$.

A 4–5. ábrán a megfelelő kocka egy hálózat-kiterítését is bemutatjuk úgy, hogy a lapok 2-szer–2-szer szerepelnek.

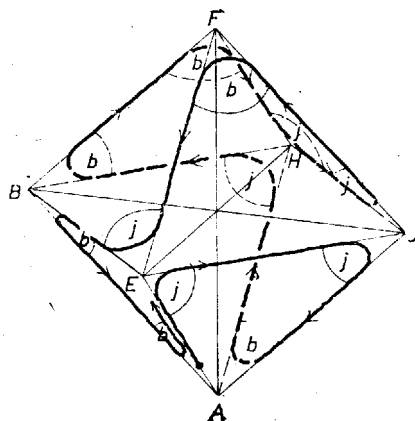


4. ábra

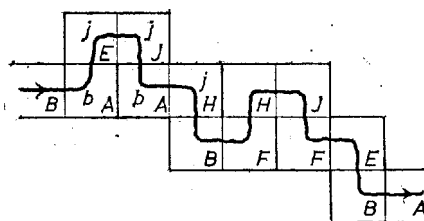


5. ábra

A harmadik lehetőség szintén egyértelműen határoz meg egy teljes bejárasi útvonalat (6–7. ábra).



6. ábra



7. ábra

Úgy kapjuk ezt, hogy az eddig bejárt

$$(B) \quad A \ E \ J \ A \ H \ B \\ b \ j \ j \ b \ j$$

útvonalrészhez berajzoljuk egyrészt egyértelmű folytatását F -be, hiszen B után *még nem* jöhet A , másrészt a kezdő (B) -től visszafelé való egyértelmű meghosszabbítását E -n át F -be; ekkor ugyanis még az FHJ háromszög kerülete van hátra, ami ismét csak egyféleképpen lehetséges:

$$(B) \quad A \ E \ J \quad A \ H \ B \quad F \ H \ J \quad F \ E \ B,$$

és a kanyarok egymásutánja, leolvasásukat most is az E -n való első áthaladástól kezdve:

$$(III) \quad \text{a 6. ábrán:} \quad j, j, \quad b, j, \quad b, b, \quad j, j, \quad b, j, \quad b, b.$$

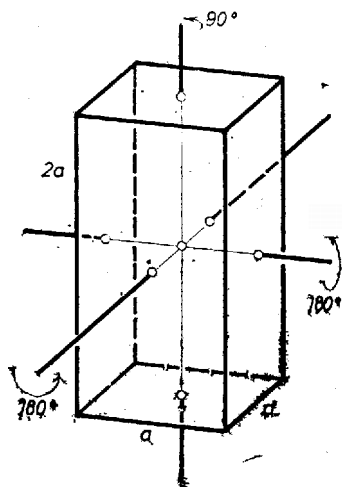
Az (I)–(III) útvonalakon ellentétes irányban haladva mindhárom esetben betű szerint az illető bejárás eredeti leírását kapjuk vissza, hiszen visszafelé haladva minden b helyére j lép és viszont; vagyis a visszafordulással nem adódik új bejárás, egy útvonalhoz csak egy bejárás tartozik, és viszont. (A (II)-ben a 10. betűtől indulva látjuk ezt, majd az 1. után természetesen a 12. és 11. betűt átírva.) És mivel (I)–(III) mindegyike tartalmaz négytagú j, b, b, j betűegymásutánt, azért akkor sem kapnánk új bejárást, ha a fenti b, j, j, b kiindulás helyett két j közé zárt két b -vel, j, b, b, j -vel újra kezdenénk a vizsgálódásunkat.

Már csak az a kérdés, hogy a (II) és (III) *útvonalak* különbözők-e, – hiszen az (I) nyilvánvalóan nem azonos velük. Valóban különbözők, mert mindegyiknek van olyan, egymás utáni betűnégyese, amely a másikban – természetesen ide értve az útvonal újratekintését, második bejárását is – nem található meg, ilyen a (II)-ben a $bjbj$ (4.–7., ill. 10.–12. és 1. betűk), a (III)-ban pedig a $jbjb$ (2.–5. és 8.–11. betűk). Az olvasóra hagyjuk annak belátását – elsősorban a szemléletét –, hogy az 5. ábra útvonalát egy síkon tükrözve, majd alkalmasan forgatva, a 3. ábrát kapjuk.

Mindezek szerint kocka alakú csomagot az előírást megtartva 3-féleképpen lehet körülkötni.

β) A további kétféle csomag nyújtással előállítható a kockából, egyik éle mentén a 2-szeresére – ezt négyzetes oszlopnak nevezzük –, illetve még egy másik éle mentén a 3-szorosára nyújtva, erről pedig mint gyufaskatulyáról beszélünk. Ezért bejárásaik is előállíthatók lesznek a 2., 3. és 6. ábrabeliből, a kérdés céljára azonban előzőleg áttekintjük egyrészt a két test, másrészt a talált 3 útvonal mozgási szimmetriáit.

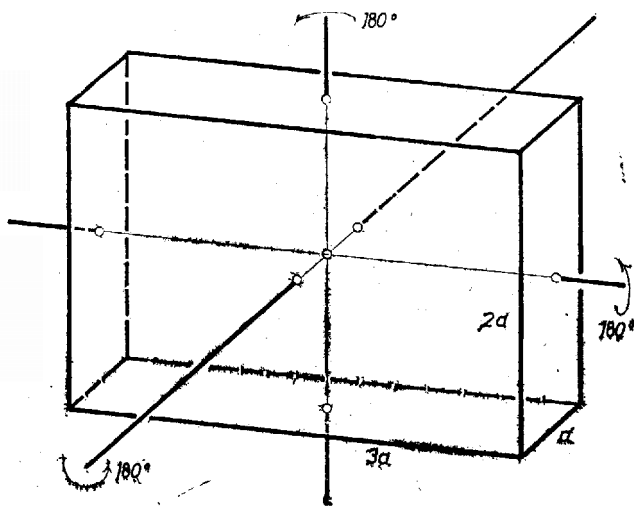
A négyzetes oszlop a hosszúságú két laptengelye egyenrangú, egymásba átvihető a $2a$ hosszúságú tengely körüli 90° -os elfordítással, a hosszú tengely viszont nyilvánvalóan nem vihető át amazokba; a rövid tengelyek körül csak 180° -os forgatásokkal megy át önmagába az oszlop (8. ábra).



8. ábra

(Testátló körüli forgatással sem vihető át önmagába az oszlop, a kockával ellentétben.)

A gyufaskatulya mindhárom laptengelye körül csak 180°-os forgatással juthat födésbe önmagával (9. ábra).



9. ábra

A bejárások önmagukon eltolhatók, ha ciklikusnak tekintjük őket, azaz a kiinduló pontba visszaérve újra kezdjük ugyanazt a bejárást; éspedig az (I) 4 lépéssel, hiszen a *jjbb* szakasz ismétlődik benne 3-szor, a (II) és (III) pedig 6 lépéssel. Az utóbbi eltolással

(II) (B) A E J A H J F E B F H B

helyére

(II') (J) F E B F H B A E J A H J

lép és az egymás fölött-alatt álló betűket összehasonlítva azt látjuk, hogy minden egyes A helyére F, minden egyes J helyére B lépett és viszont, az E és H betűk pedig a helyükön maradtak. Így mondhatjuk: a (II) útvonal az EH tengely körüli 180°-os elfordítással önmagába ment át. Ez a 3. ábrán abból is látszik, hogy a 6 db *j*-kanyarodás párosával a B, E, J csúcsoknál történik, a 6 db *b* az F, H, A-nál és mindkét csúcshármaszt az EH körüli forgatás önmagába viszi át. Tehát EH a 3. ábrabeli útvonalnak kitüntetett tengelye, mert a BJ, AF tengelynek nincs meg ez a tulajdonsága.

Azt is mutatja a 3. ábra, hogy a mondott B, E, J csúcshármas fölcserélhető az F, H, A hármaszal, éspedig pl. a BF, AJ élpár felezőpontjait összekötő tengely (az oktaéder éltengelye) körüli 180°-os forgatással. Így minden *j* helyére *b* jut és viszont, de ha még az elforgatott útvonalat fordított irányban járjuk be, betűink ismét cserélnek, és ugyanezt a *b*, *j* egymásutánt kapjuk. Forgatásunk az előbb kitüntetett EH tengelyt a helyén hagyja, csak irányítását változtatta meg, a másik két tengelyt pedig egymásba vitte át, ezek tehát egymással egyenrangúak. (Emlékeztetnek ezek a megállapítások az oszlop tengelyeiről mondottakra.) Hasonló megfontolás szerint a III. útvonal BJ tengelye kitüntetett, a másik kettő egyenrangú.

Hasonlóan adódik, hogy (I)-et és a 2. ábrát a FEJ és AHB lapok középpontjait összekötő tengely körüli, bármelyik irányú 120°-os forgatás önmagába viszi át, egyszersmind az AF, BJ, EH tengelyeket ciklikusan egymásba, tehát ennek az útvonalnak a 3 tengelye egyenrangú, nincs kitüntetett tengelye (hasonlít a kockára).

γ) A legutóbbiak szerint az (I) útvonal (körülkötözés) csak 1-féleképpen tehető rá az oszlopra is, a gyufaskatulyára is. Azt értjük ezen, hogy a 2. ábra bármelyik tengelyét választjuk is ki a 2-szeres nyújtásra – ami 3-féleképpen gondolható

–, ill. a skatulya 3 tengelyéhez bárhogy rendeljük is hozzá a 2. ábra tengelyeit a gondolható 6 lehetőség közül – az így készített 3, ill. 6 körülköltözés nem különböztethető meg egymástól.

Ezzel szemben a (II) és (III) útvonal kitüntetett tengelyét az oszlopra 2-féleképpen tehetjük rá, pl. (II)-ben vagy az EH -t, vagy egy másik tengelyt véve 2-szer akkorának, mint a másik 2, a skatulyára pedig 3-féleképpen.

Mindezek szerint az oszlopon $1 + 2 + 2 = 5$ -féle, a skatulyán pedig $1 + 3 + 3 = 7$ -féle, egymástól megkülönböztethető körülköltözés lehetséges.

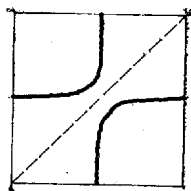
Komornik Vilmos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Horváth László (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn., II. o. t.)

Móri Tamás (Budapest, Berzsényi D. Gimn., II. o. t.)

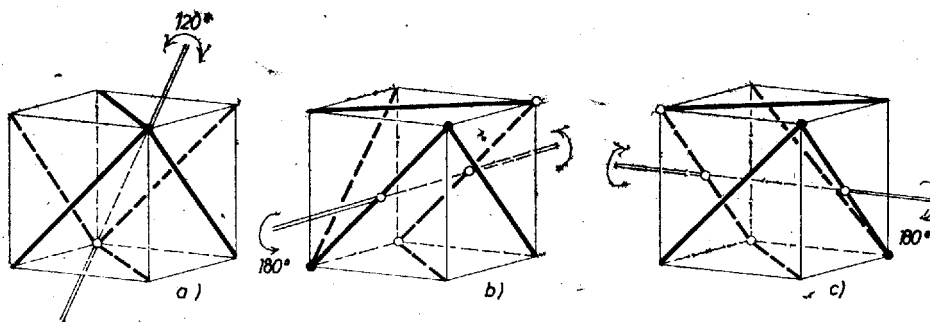
Oláh Vera (Budapest, Berzsényi D. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Eljuthatunk (I)–(III)-hoz a következő ötlet teljes kidolgozásával is. A kocka egy lapján való kétszeri áthaladás útvonaldarabjait az egyik átló kettéválasztja (10. ábra), és mind a 6 lap ilyen átlóinak összeválogatásával mintegy elkészítjük a zsineg számára a bolyongási útvonalat.



10. ábra

A 6 átló együttese nem választhatja szét két vagy több tartományra a kocka felületét – különben nem juthatnánk át egyikből a másikba –, ezért nem tartalmazhat sem háromszöget, sem (torz) négyszöget. A lehetséges rendszereket a 11. ábra a)–c) részei mutatják, ebben a sorrendben felelnek meg a 2., 3., 6. ábráknak.



11. ábra

(Az élek hármásával alkotnak összefüggő rész-rendszereket rendre 1, 2, 2 csatlakozási csúccsal.)

Füredi Zoltán (Budapest, Móricz Zs. Gimn., II. o. t.)

Reiczigél Jenő (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

2. Többen azért nem kapták meg a teljes pontszámot, mert a csomagot mintegy lerögzítették, egyszer s mindenkorra kijelölve pl. az alsó és elülső lapot. Ez ugyanis lényegesen megváltoztatta a kérdést. Mondhatjuk így is: ezek egy kocka alakúvá egyszerűsített (4 lábon álló) postaládát kötözték körül; vagy egy játék-dobókockát, amelynek bármely két lapja megkülönböztethető egymástól a pontok száma alapján, és így semmi szimmetriája sincs. – Ezek a versenyzők többnyire 16, 48, 96 körülköltözést adtak meg eredményként a 3-féle csomagra.