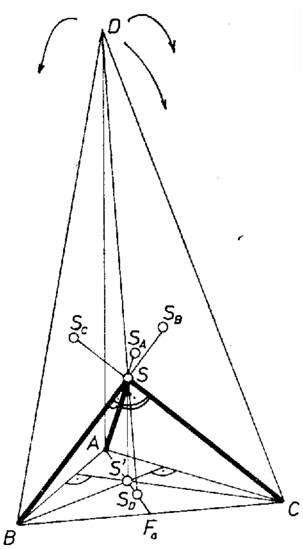
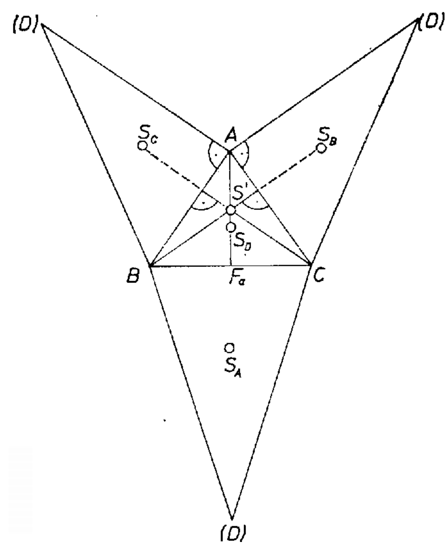
I. megoldás. Megmutatjuk, hogy a tetraéder S súlypontjának az ABC síkra való S' merőleges vetülete az ABC háromszög magasságpontja és hogy a háromszög egyenlő szárú: $AB = AC$.



1. ábra



2. ábra

Valóban, AS merőleges SB-re és SC-re, tehát az általuk meghatározott sík minden egyenesére, így BC-re is, de ekkor AS' vetülete is merőleges rá, mert BC merőleges az ASS' sík SS' egyenesére is, tehát a sík minden egyenesére.

Hasonlóan látható, hogy BS(és CS' is) magasságvonala az ABC háromszögnek, tehát S' a magasságpont.

A feltétel szerint DA merőleges az ABC síkra, így párhuzamos SS'-vel, tehát egy síkban vannak. Ekkor az ABC háromszög S_D súlypontja mint a DS egyenes döféspontja az ABC síkon, ennek és az $ADSS'$ síknak a metszésvonalán, az AS' egyenesen van. Ez az egyenes tehát súlyvonal is, magasságvonal is, vagyis szimmetriatengely. Így $AB = AC$.

Mivel az S súlypontra $S_DS = \dfrac{1}{4}S_DD$, így $S_DS' = \dfrac{1}{4}S_DA = \dfrac{1}{6}AF_a$, ahol F_a a BC oldal felezőpontja. Válasszuk S_DS'-t mértékegységnek, ekkor tehát

$$AF_a = 6, \qquad AS' = AS_D - S'S_D = 3 = \frac{1}{2}AF_a = S'F_a.$$

AF_aS és BCS egyenlő szárú derékszögű háromszögek, utóbbi azért, mert a tetraéder szimmetrikus az ABC háromszögre AF_a-n át merőlegesen állított ADF_a síkra, amely tartalmazza S-et is; az előbbi S-nél derékszögű és SS' magassága súlyvonal is. Ezek alapján

$$SS' = S'A = 3, \quad AS = 3\sqrt{2} = SF_a = F_aB, \quad BC = 2F_aB = 6\sqrt{2},$$

$$SB = SC = BC/\sqrt{2} = 6; \quad AB = AC = \sqrt{AS^2 + SB^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}, \; AD = 4SS' = 12,$$

$$BD = CD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{198} = 3\sqrt{22}.$$

Végül az A, B, C, D csúcsokból induló s_A, s_B, s_C, s_D súlyvonalak hossza

$$s_A=\frac{4}{3}AS=4\sqrt{2},\ s_B=s_C=\frac{4}{3}SB=8,\ \text{és}\ s_D=4S_DS=4\sqrt{S_DS'^2+SS'^2}=4\sqrt{10}.$$

Így a keresett távolságok aránya (mindegyik kapott mértékszám $1/\sqrt{2}$-szörösét véve)

$$\begin{aligned}&AB:AC\ :\ AD:BC:BD\ :\ CD\ :s_A:s_B\ :s_C\ :s_D=\\&=3\sqrt{3}:3\sqrt{3}:6\sqrt{2}:6\ :3\sqrt{11}:3\sqrt{11}:4:4\sqrt{2}:4\sqrt{2}:4\sqrt{5}.\end{aligned}$$

(Az élek aránya egyszerűbb alakban $\sqrt{3}:\sqrt{3}:\sqrt{8}:2:\sqrt{11}:\sqrt{11}$, a súlyvonalaké pedig $1:\sqrt{2}:\sqrt{2}:\sqrt{5}$.)

Balogh Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn., II. o. t.)
Móri Tarmás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Számítási feladatok megoldására jól használhatunk vektorokat. [1] Jelöljük az SA, SB, SC irányú, egységnyi hosszúságú vektorokat $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$-val. Ekkor az A, B, C csúcsok helyvektorai

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{SA}=\frac{3}{4}s_A\mathbf{i},\qquad \mathbf{b}=\overrightarrow{SB}=\frac{3}{4}s_B\mathbf{j},\qquad \mathbf{c}=\overrightarrow{SC}=\frac{3}{4}s_C\mathbf{k}.$$

Ismeretes,[2] hogy a súlypont $\mathbf{s}$ helyvektora a csúcsokéinak a számtani közepe:

$$\mathbf{s}=\frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}),$$

és ez esetünkben a $\mathbf{0}$ nullvektor. Ennek alapján

$$\mathbf{d}=-\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}=-\frac{3}{4}(s_A\mathbf{i}+s_B\mathbf{j}+s_c\mathbf{k}),$$

és ennek hossza $\frac{3}{4}s_D$. Az A-ból kiinduló élek vektorai:

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}=\frac{3}{4}(-s_A\mathbf{i}+s_B\mathbf{j}),\qquad \overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}=\frac{3}{4}(-s_A\mathbf{i}+s_C\mathbf{k}),$$
$$\overrightarrow{AD}=\mathbf{d}-\mathbf{a}=\frac{3}{4}(2S_A\mathbf{i}+s_B\mathbf{j}+s_C\mathbf{k}).$$

És mivel $AD\perp AB$ és $AD\perp AC$, azért skaláris szorzatuk 0:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{9}{16}(-2s_A^2+s_B^2)=0,\qquad s_B=\sqrt{2}S_A,$$
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{9}{16}(-2s_A^2+s_C^2)=0,\qquad s_C=\sqrt{2}s_A$$

Ezek alapján

$$\mathbf{d}^2=\frac{9}{16}(s_A^2+s_B^2+s_C^2)=\frac{45}{16}s_A^2=\frac{9}{16}s_D^2,\quad s_D=\sqrt{5}s_A,$$
$$AB^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2=\frac{27}{16}s_A^2=AC^2,\quad BC^2=\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2=\frac{9}{4}s_A^2,$$
$$AD^2=\frac{9}{16}(4s_A^2+s_B^2+s_C^2=\frac{9}{2}s_A^2,$$

és ezekből már egyszerűen adódik az I. megoldás végeredménye.

Pataki Béla (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)
Reiczigel Jenő (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A 2. ábra a gúla hálózatának belső oldalát mutatja.

[1] A felhasznált tételeket lásd pl.: *Hajós György–Neukomm Gyula–Surányi János*: Matematikai versenytételek II. rész, 2., bővített kiadás, 28–33. o., Tankönyvkiadó, Budapest,1965.

[2] Lásd pl. *Horvay Katalin–Pálmay Lóránt:* Matematika a gimn. II. osztálya számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967., 154. o.