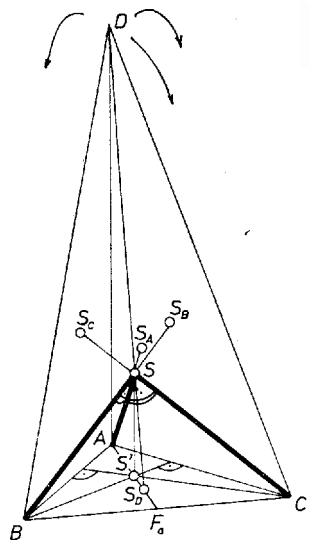
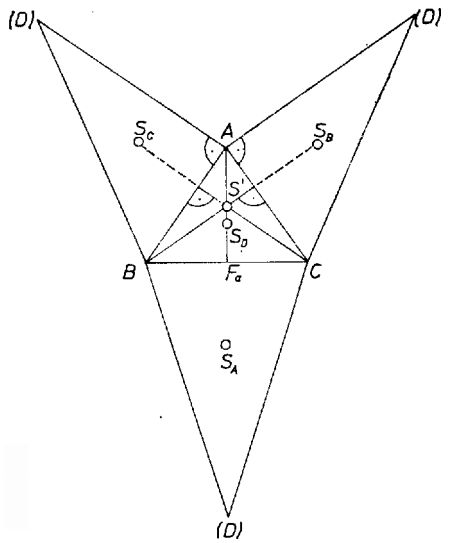
I. megoldás. Megmutatjuk, hogy a tetraéder S súlypontjának az ABC síkra való S' merőleges vetülete az ABC háromszög magasságpontja és hogy a háromszög egyenlő szárú: $AB = AC$.



1. ábra



2. ábra

Valóban, AS merőleges SB-re és SC-re, tehát az általuk meghatározott sík minden egyenesére, így BC-re is, de ekkor AS' vetülete is merőleges rá, mert BC merőleges az ASS' sík SS' egyenesére is, tehát a sík minden egyenesére.

Hasonlóan látható, hogy BS(és CS' is) magasságvonala az ABC háromszögnek, tehát S' a magasságpont.

A feltétel szerint DA merőleges az ABC síkra, így párhuzamos SS'-vel, tehát egy síkban vannak. Ekkor az ABC háromszög S_D súlypontja mint a DS egyenes döféspontja az ABC síkon, ennek és az $ADSS'$ síknak a metszésvonalán, az AS' egyenesen van. Ez az egyenes tehát súlyvonal is, magasságvonal is, vagyis szimmetriatengely. Így $AB = AC$.

Mivel az S súlypontra $S_DS = \frac{1}{4}S_DD$, így $S_DS' = \frac{1}{4}S_DA = \frac{1}{6}AF_a$, ahol F_a a BC oldal felezőpontja. Válasszuk S_DS'-t mértékegységnek, ekkor tehát

$$AF_a = 6, \qquad AS' = AS_D - S'S_D = 3 = \frac{1}{2}AF_a = S'F_a.$$

AF_aS és BCS egyenlő szárú derékszögű háromszögek, utóbbi azért, mert a tetraéder szimmetrikus az ABC háromszögre AF_a-n át merőlegesen állított ADF_a síkra, amely tartalmazza S-et is; az előbbi S-nél derékszögű és SS' magassága súlyvonal is. Ezek alapján

$$SS' = S'A = 3, \quad AS = 3\sqrt{2} = SF_a = F_aB, \quad BC = 2F_aB = 6\sqrt{2},$$
$$SB = SC = BC/\sqrt{2} = 6; \quad AB = AC = \sqrt{AS^2 + SB^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}, \; AD = 4SS' = 12,$$
$$BD = CD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{198} = 3\sqrt{22}.$$

Végül az A, B, C, D csúcsokból induló s_A, s_B, s_C, s_D súlyvonalak hossza

$$s_A = \frac{4}{3}AS = 4\sqrt{2},\ s_B = s_C = \frac{4}{3}SB = 8,\ \text{és}\ s_D = 4S_DS = 4\sqrt{S_DS'^2 + SS'^2} = 4\sqrt{10}.$$

Így a keresett távolságok aránya (mindegyik kapott mértékszám $1/\sqrt{2}$-szörösét véve)

$$\begin{aligned} AB : AC\ :\ AD : BC : BD\ :\ CD\ : s_A : s_B\ : s_C\ : s_D = \\ = 3\sqrt{3} : 3\sqrt{3} : 6\sqrt{2} : 6\ : 3\sqrt{11} : 3\sqrt{11} : 4 : 4\sqrt{2} : 4\sqrt{2} : 4\sqrt{5}. \end{aligned}$$

(Az élek aránya egyszerűbb alakban $\sqrt{3} : \sqrt{3} : \sqrt{8} : 2 : \sqrt{11} : \sqrt{11}$, a súlyvonalaké pedig $1 : \sqrt{2} : \sqrt{2} : \sqrt{5}$.)

Balogh Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn., II. o. t.)
Móri Tarmás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Számítási feladatok megoldására jól használhatunk vektorokat. [1] Jelöljük az SA, SB, SC irányú, egységnyi hosszúságú vektorokat $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$-val. Ekkor az A, B, C csúcsok helyvektorai

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{SA} = \frac{3}{4}s_A\mathbf{i}, \qquad \mathbf{b} = \overrightarrow{SB} = \frac{3}{4}s_B\mathbf{j}, \qquad \mathbf{c} = \overrightarrow{SC} = \frac{3}{4}s_C\mathbf{k}.$$

Ismeretes,[2] hogy a súlypont $\mathbf{s}$ helyvektora a csúcsokéinak a számtani közepe:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}),$$

és ez esetünkben a $\mathbf{0}$ nullvektor. Ennek alapján

$$\mathbf{d} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = -\frac{3}{4}(s_A\mathbf{i} + s_B\mathbf{j} + s_c\mathbf{k}),$$

és ennek hossza $\frac{3}{4}s_D$. Az A-ból kiinduló élek vektorai:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \frac{3}{4}(-s_A\mathbf{i} + s_B\mathbf{j}), \qquad \overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = \frac{3}{4}(-s_A\mathbf{i} + s_C\mathbf{k}),$$
$$\overrightarrow{AD} = \mathbf{d} - \mathbf{a} = \frac{3}{4}(2S_A\mathbf{i} + s_B\mathbf{j} + s_C\mathbf{k}).$$

És mivel $AD \perp AB$ és $AD \perp AC$, azért skaláris szorzatuk 0:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{9}{16}(-2s_A^2 + s_B^2) = 0, \qquad s_B = \sqrt{2}S_A, \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{9}{16}(-2s_A^2 + s_C^2) = 0, \qquad s_C = \sqrt{2}s_A \end{aligned}$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^2 &= \frac{9}{16}(s_A^2 + s_B^2 + s_C^2) = \frac{45}{16}s_A^2 = \frac{9}{16}s_D^2, \quad s_D = \sqrt{5}s_A, \\ AB^2 &= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \frac{27}{16}s_A^2 = AC^2, \quad BC^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 = \frac{9}{4}s_A^2, \\ AD^2 &= \frac{9}{16}(4s_A^2 + s_B^2 + s_C^2 = \frac{9}{2}s_A^2, \end{aligned}$$

és ezekből már egyszerűen adódik az I. megoldás végeredménye.

Pataki Béla (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)
Reiczigel Jenő (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A 2. ábra a gúla hálózatának belső oldalát mutatja.

[1] A felhasznált tételeket lásd pl.: *Hajós György–Neukomm Gyula–Surányi János*: Matematikai versenytételek II. rész, 2., bővített kiadás, 28–33. o., Tankönyvkiadó, Budapest,1965.

[2] Lásd pl. *Horvay Katalin–Pálmay Lóránt:* Matematika a gimn. II. osztálya számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967., 154. o.