

I. Legyenek egy, a követelménynek megfelelő szám egymás utáni jegyei A, B, C , ahol $A > 0$. Az első két négyzetszám, ti. $(100A + 10B + C)^2$ és $(10B + C)^2$ utolsó jegye egyezik, ezért a harmadik négyzetszám utolsó jegye 0, tehát alapjának utolsó jegye is 0. Ezért valódi megoldásban $C > 0$ is fennáll.

A követelmény szerint

$$(100A + 10B + C)^2 = (10B + C)^2 + (100A + 10B)^2,$$

kifejtéssel és rendezéssel

$$(1) \quad 2AC = B^2.$$

Itt A és C szerepe valóban felcserélhető, tehát Zoltán állítása helyes. Elég tehát azokat a számjegyhármasokat felírni, amelyekben $A > C$. (Nem lehet ugyanis $A = C$, különben (1) bal oldala $2C^2$ lenne, ami nem teljes négyzet (hacsak nem $C = 0$, ezt viszont kizártuk).

II. Mivel (1) bal oldala páros szám, B^2 , és vele B is páros, továbbá $A, C > 0$ miatt $B > 0$. Sorravéve a páros számjegyeket

$B = 2$ esetén $AC = 2$, prim, innen $A = 2, C = 1$, a szám 221;

$B = 4$ esetén $AC = 8$, innen $A = 8, C = 1$, a szám 841,

és $A = 4, C = 2$, a szám 442;

$B = 6$ esetén $AC = 18$, innen $A = 9, C = 2$, a szám 962,

és $A = 6, C = 3$, a szám 663;

$B = 8$ esetén $AC = 32$, innen $A = 8, C = 4$, a szám 884.

Kirchner Imre (Budapest, Steinmetz M. Gimn., II. o. t.)

Cséplő Gábor (Budapest, Berzsényi D. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az állítás és a talált (1) feltétel minden olyan számrendszerben érvényes, amelyben csak a 0 végű (egész) számok négyzete végződik 0-ra. Sőt a 221 és 122 megoldás minden rendszerben érvényes úgy, hogy a harmadik négyzetszám alapjának utolsó számjegye 0. Viszont a 4-es számrendszerben 2^2 , a 8-asban 4^2 , a 16-osban $4^2, 8^2, 12^2$ is 0-ra végződik, így elvileg lehetségesek más megoldások is.

2. A tízes rendszerben – mint láttuk – az $\overline{ABC} = 221$ -es megoldás 4 többszöröse is megoldás. Hasonlóan már a 17-es számrendszerben a 841-es megoldás 2-szerese is megoldás.