

I. megoldás. Vezessük be átmenetileg a következő jelöléseket:

$$b + c + d = A, \quad c + a + d = B, \quad a + b + d = C.$$

Ezekkel

$$\begin{aligned} K &= (B - A)AB + (C - B)BC + (A - C)CA = \\ &= B(AB - A^2 + C^2 - BC) + (A - C)CA = \\ &= B\{(A - C)(B - A - C)\} + (A - C)CA = \\ &= (A - C)\{B^2 - AB - BC + CA\} = (A - C)(B - A)(B - C), \end{aligned}$$

végül az eredeti változókra visszatérve

$$K = (c - a)(a - b)(c - b) = -(a - b)(b - c)(c - a).$$

Látjuk, hogy a kifejezés nem függ d -től.

Zentai István (Budapest, Móricz Zs. Gimn., I. o. t.)

Varga Mária (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)

II. megoldás. K első tagja (3 tényezős szorzata) részbeni kifejtéssel így alakítható:

$$\begin{aligned} &(a - b)\{ab + (a + b)(c + d) + (c + d)^2\} = \\ &= ab(a - b) + (a^2 - b^2)(c + d) + (a - b)(c + d)^2. \end{aligned}$$

És mivel K második tagja úgy áll elő az elsőből – és a harmadik is a másodikból –, hogy minden egyes a, b, c, d betű helyére rendre a b, c, a, d betűt írjuk, azért a további két szorzat:

$$\begin{aligned} &bc(b - c) + (b^2 - c^2)(a + d) + (b - c)(a + d)^2, \\ &ca(c - a) + (c^2 - a^2)(b + d) + (c - a)(b + d)^2. \end{aligned}$$

Könnyen belátható, hogy további kifejtéssel a 3. oszlopban d^2 együtthatója 0, ugyanígy d -é is (a 2. és 3. oszlopban külön-külön is), továbbá, hogy az 1. és 2. oszlopból a d -t nem tartalmazó rész is 0. Eszerint csupán a 3. oszlopból, mindjárt tovább alakítva

$$\begin{aligned} K &= (a - b)c^2 + (b - c)a^2 + (c - a)b^2 = \\ &= (a - b)c^2 + \{ab(a - b) - c(a^2 - b^2)\} = \\ &= (a - b)\{c^2 - (a + b)c + ab\} = (a - b)(c - b)(c - a). \end{aligned}$$

Az utolsó alakításban azt a felismerést használtuk fel, hogy $a\{\}$ -ben álló kifejezést c -re vonatkozó, 0-ra redukált másodfokú egyenlet bal oldalának tekintve, ennek gyökei a és b .

III. megoldás. Kifejezésünk bármelyik betűre mint változóra nézve legfőbb másodfokú polinom. Tekintsük a polinomjának, ekkor

$$K = k(a - a_1)(a - a_2)$$

alakban írható, ahol k az a^2 együtthatója, a_1 és a_2 pedig a polinom zérushelyei.

Könnyű belátni, hogy a helyére b -t, vagy c -t helyettesítve $K = 0$ adódik pl. $a = b$ esetén K első tagja 0, a másik kettő pedig csak az első tényezőkben különbözik, ezek összege pedig 0), tehát $a_1 = b, a_2 = c$. Továbbá a^2 együtthatója

$$k = (b + c + d) + (b - c) - (b + c + d) = b - c,$$

tehát

$$K = (b - c)(a - b)(a - c).$$

Reiczigél Jenő (Budapest, Fazekas M. Gimn., II. o. t.)