

I. megoldás. Elég azt megmutatni, hogy $N = 2n^2 - 31$ alakú szám nem osztható a 2, 3, 5 és 7 egyjegyű prímszámokkal semmilyen egész n esetén sem, hiszen ha osztható volna pl. 6-tal, akkor 2-vel is, 3-mal is osztható volna. A 2-es osztóra nyilvánvaló az állítás, N mindig páratlan.

Egy különbség akkor és csak akkor osztható egy d számmal, ha d -vel osztva a tagjait, egyenlő maradékok lépnek fel, azaz ha

$$a = q_1d + r \quad \text{és} \quad b = q_2d + r \quad (0 \leq r < d),$$

akkor

$$a - b = (q_1 - q_2)d;$$

és fordítva, ha

$$a - b = q_3d \quad (\text{és ismét} \quad b = q_2d + r),$$

akkor

$$a = (a - b) + b = (q_3 + q_2)d + r.$$

Ennek alapján a 3, 5 és 7 osztók esetében külön-külön vizsgáljuk $2n^2$ és 31 maradékát.

3-mal osztva, n legkisebb nem negatív maradéka 0, 1 vagy 2, azaz $n = 3k$ vagy $3k + 1$ vagy $3k + 2$, ahol k egész, így $n^2 = 9k^2 = 3 \cdot 3k^2$, ill. $9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, ill. $3(3k^2 + 4k + 1) + 1$, vagyis az $n^2 : 3$ osztás maradéka 0 vagy 1, így a $2n^2 : 3$ osztásé 0 vagy 2, tehát nem 1, mint a $31 : 3$ osztásé. Eszerint N sohasem osztható 3-mal.

Célszerűbb a legkisebb abszolút értékű maradékot tekinteni. Így $n = 3k + 2 = 3(k + 1) - 1 = 3m - 1$ és $n^2 = 3(3m^2 - 2m) + 1$, mint az $n = 3k + 1$ esetben. A további osztók esetében az egyenlő abszolút értékű maradékok esetét párokba kapcsoljuk.

Az 5-ös osztó szempontjából $n = 5k$, vagy $5k \pm 1$, vagy $5k \pm 2$, és így

$$2n^2 = 5 \cdot 10k^2, \quad \text{ill.} \quad 5(10k^2 \pm 4k) + 2, \quad \text{ill.} \\ 5(10k^2 \pm 8k + 1) + 3,$$

tehát a $2n^2 : 5$ osztás legkisebb nem negatív maradéka 0, 2 vagy 3, viszont 31-et osztva 1 marad, így N sohasem osztható 5-tel.

Ugyanígy $n = 7k$, $7k \pm 1$, $7k \pm 2$, $7k \pm 3$ szerint

$$2n^2 = 7(14k^2), \quad \text{ill.} \quad 7(14k^2 \pm 4k) + 2, \\ \text{ill.} \quad 7(14k^2 \pm 8k + 1) + 1, \quad \text{ill.} \quad 7(14k^2 \pm 12k + 2) + 4,$$

a legkisebb nem negatív maradék rendre 0 vagy 2 vagy 1 vagy 4, ezzel szemben a $31 : 7$ osztás maradéka 3, tehát N sohasem osztható 7-tel. Ezzel – az előrebocsátottak értelmében – az állítást bebizonyítottuk.

Ugyanígy látható be, hogy 11-gyel sem osztható egyetlen N alakú szám sem, de ezt 13-ra már nem mondhatjuk: $n = 10$ esetén $2n^2 - 31 = 169 = 13^2$. Eszerint $2n^2 - 31$ alakú számnak nincs 13-nál kisebb valódi osztója.

II. megoldás. Keressünk az $N = 2n^2 - 31$ szám közelében az egyjegyű prímszámokkal osztható számot. Az

$$A = 2n^2, \quad B = 2n^2 - 2, \quad C = 2n^2 - 8, \quad D = 2n^2 - 18$$

számok szorzata:

$$K = ABCD = 16n(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$$

osztható hét egymás utáni szám, ti. $n-3$, $n-2$, $\dots$, $n+2$ és $n+3$ mindegyikével, K tehát osztható 2-vel is, 3-mal is, 5-tel is és 7-tel is. Emiatt az A , B , C , D számok között is van 2-vel osztható, van köztük 3-mal osztható, van köztük 5-tel osztható, és van köztük 7-tel osztható is. Bármelyik is osztható közülük ezekkel a számokkal, N nem lehet osztható velük, hiszen az

$$A - N = 31, \quad B - N = 29, \quad C - N = 23, \quad D - N = 13$$

különbségek egyike sem osztható a 2, 3, 5, 7 számok egyikével sem. Ezzel feladatunk állítását bebizonyítottuk.

Ha az A , B , C , D számokhoz hozzávesszük az

$$E = 2(n+4)(n-4) = 2n^2 - 32, \quad F = 2(n+5)(n-5) = 2n^2 - 50$$

számokat, a fentihez hasonló megfontolással kimutathatjuk, hogy N nem osztható 11-gyel sem, hiszen sem a fenti $A - N$, $B - N$, $C - N$, $D - N$ különbségek, sem az

$$E - N = 1, \quad F - N = 19$$

különbségek nem oszthatók 11-gyel.