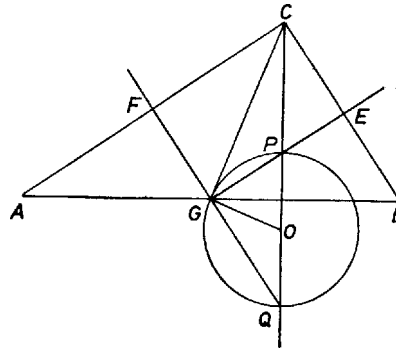


I. megoldás. Legyen a háromszög átfogója AB , és legyen rajta P , Q a BC , ill. AC befogóra az E , ill. F felező pontban állított merőlegesen.



Így a CPE és a QCF háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, mert a csúcsok felsorolása szerint páronként megfelelő oldalaik merőlegesek egymásra, tehát az oldalpárok aránya egyenlő:

$$\frac{CP}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{CB}{2AC}, \quad \frac{CQ}{BA} = \frac{CF}{BC} = \frac{CA}{2BC},$$

innen

$$\sqrt{CP \cdot CQ} = \sqrt{\frac{AB \cdot CB}{2AC} \cdot \frac{BA \cdot CA}{2BC}} = \frac{AB}{2},$$

amit bizonyítanunk kellett.

Hetzmann Antal (Tatabánya, Árpád Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. Ha a befogók egyenlők, akkor P és Q egybeesik az átfogó G felezőpontjával, az állítás semmitmondó, $CP = CQ = CG = AB/2$, hiszen ekkor CGA is egyenlő szárú derékszögű háromszög.

Császár Gyula (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)

II. megoldás. A fenti jelölésekkel elég azt belátnunk, hogy a PQ átmérőjű, O középpontú kört a CG egyenes G -ben érinti, hiszen CP és CQ e körnek C -ből húzott szelői, mert P is, Q is abban az ACB derékszögtartományban vannak, mint maga az ABC háromszög, másrészt $CG = GA = AB/2$, hiszen G az ABC háromszög köré írt kör középpontja.

G rajta van a PQ átmérőjű körön, mert itt metszi egymást a két felező merőleges, amelyek pedig egymásra is merőlegesek. Választhatjuk a betűzést úgy, hogy $CA > CB$ legyen, ekkor P a GE szakaszon, Q pedig az FG meghosszabbításán adódik, $CP < CQ$, ezért az OCG háromszögben

$$\begin{aligned} \angle POG + \angle GCO &= 2\angle PQG + \angle GCO = (\angle GAC + \angle QCB) + \angle OCG = \\ &= \angle GCA + \angle GCB = \angle ACB = 90^\circ, \end{aligned}$$

hiszen GAC egyenlő szárú háromszög. Eszerint GC merőleges a GO sugárra. Ezt akartuk bizonyítani.

Kovács István (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)