

I. megoldás. Hozzáadogatással könnyen kifejezhetjük az $1 + 2 + \dots + N = S_N$ összeget N első tíz természetes szám értékére:

$$\begin{array}{cccccccccc} N = & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \\ S_N = & 1, & 3, & 6, & 10, & 15, & 21, & 28, & 36, & 45, & 55. \end{array}$$

Az eddigi S_N értékek egyes helyi értékű jegyei között nem fordul elő 2, 4, 7 és 9, röviden: nincs ilyen végződésű S_N . Megmutatjuk, hogy tovább sem lép fel S_N -ben ilyen végződés. Ugyanis S_N -ből mindjárt S_{N+10} -et képezve 10 új tagot adunk hozzá, ezeknek a végződésai között a 10-féle számjegy mindegyike pontosan egyszer lép fel, vagyis S_N végződéséhez $0 + 1 + 2 + \dots + 8 + 9 = 45$ -öt adunk hozzá. Így S_{N+10} végződése 5-tel nagyobb, mint S_N végződésénél, ha ez 5-ön aluli számjegy volt, ha pedig 5 vagy nagyobb volt, akkor 5-tel kisebbnek. Mármint a fenti négy hiányzó végződés éppen olyan két párba kapcsolható: 2 és 7, ill. 4 és 9, amelyek csak egymásból adódhatnak, N -ről $N + 10$ -re áttérve.

Ezzel beláttuk 72-re és 74-re végződő S_N lehetetlenségét és további 38 soha fel nem lépő kétjegyű végződést találtunk: $X2$, $X4$, $X7$, és $X9$, ahol X bármelyik számjegyet jelentheti.

Áttérve a hátra levő 73-as kétjegyű végződésre, látjuk, hogy a 3-as végződés előfordul $N = 2$ esetében, továbbá meggondolásunk szerint $N = 17$ -nél, mert S_7 végződése 8 és $8 - 5 = 3$. A teljes érték

$$S_{17} = S_7 + 45 + 8 \cdot 10 = 153$$

(ugyanis a hozzáadott tagok közül 8 egy-egy tízest is tartalmaz), ez sem 73-ra végződik.

Fenti meggondolásunkat egymás után kétszer alkalmazva S_{N+20} végződésében S_N végződése ismétlődik, hiszen így $2 \cdot 45 = 90$ -et adunk a végződéshez. Eszerint csak $20k + 2$ és $20k + 17$ alakú N -ekre lesz S_N végződése ismét 3 (k természetes szám). Mármint az S_N -hez hozzáadott 20 szám összege

$$\begin{aligned} (N + 1) + (N + 2) + (N + 3) + \dots + (N + 19) + (N + 20) &= \\ &= 20N + (1 + 2 + \dots + 20) = 20N + 210, \end{aligned}$$

és ez $N = 20k + 2$ esetén $400k + 250$, ha pedig $N = 20k + 17$, akkor $400k + 550$ alakú. Eszerint pedig mindkét esetben a 3-ra végződő S_N -ek kétjegyű végződésében 03 és 53 változtatják egymást, tehát valóban nem lép fel a 73-as végződés.

Egyúttal azt is kaptuk, hogy nem lehet a végződés 13, 23, 33, 43, 63, 73, 83 és 93 sem. Hasonlóan adódik, hogy ha S_N egyjegyű végződése 8 (ti. $20k + 7$ és $20k + 12$ alakú N -ek esetében), akkor kétjegyű végződése csak 28 vagy 78 lehet, vagyis nem lehet 08, 18, 38, 48, 58, 68, 88 és 98.

Megállapításaink természetesen csak a tízes számrendszerre vonatkoznak.

II. megoldás. Könnyű belátni, hogy

$$(1) \quad S_N = \frac{N(N+1)}{2},$$

vagyis az összeg megkapható úgy, hogy N -et szorozzuk a rá következő természetes számmal és a szorzatot osztjuk 2-vel. Ez ugyanis érvényes, ha $N = 1$, és feltéve, hogy valamely természetes számra érvényes, akkor érvényes a rá következőre is:

$$S_{N+1} = S_N + (N + 1) = \frac{N(N+1)}{2} + (N + 1) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}.$$

Az (1) összefüggés jobb oldalát teljes négyzetté alakíthatjuk, 8-cal szorozva és 1-et hozzáadva:

$$1 + 8S_N = (2N + 1)^2.$$

A bal oldal tehát egy páratlan szám négyzete. Ámde $S_N = 100k + 72$, $100k + 73$ és $100k + 74$ esetén $1 + 8S_N$ kétjegyű végződése 77, 85, ill. 93, ami nem lehet négyzetszám végződése. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

$1 + 8S_N$ egyjegyű végződése 7, ill. 3 minden olyan S_N -re, melynek 8-szorosa 6-ra, ill. 2-re végződik, vagyis 6 maga 2-re, vagy 7-re, ill. 4-re vagy 9-re végződik. És mivel négyzetszám egyjegyű végződése sohasem 7, sem 3, azért S_N -nek 1-jegyű végződése sem lehet 2, 7, 4 és 9.

A 85 nem lehet négyzetszám végződése, de az 5 lehet, ekkor a kétjegyű végződés 25, tehát a szám $100k + 25$ alakú, és itt k páros, ugyanis

$$(10m + 5)^2 = 100m(m + 1) + 25,$$

és m , $m + 1$ egyike páros. Mármint, ha

$$1 + 8S_N = 200n + 25,$$

akkor $S_N = 25n + 3$, és így S_N kétjegyű végződése 03, 28, 53 vagy 78. Mivel pedig minden 3-as és 8-as végű szám 8-szorosát 1-gyel növelve 5-re végződő számot kapunk, azért a 3-ra és 8-ra végződő, előbb fel nem sorolt kétjegyű számok nem léphetnek fel $1 + 2 + \dots + N$ alakú összeg utolsó két jegyében.

Ábrahám Zoltán (Nagykőrös, Arany J. Gimn., II. o. t.)