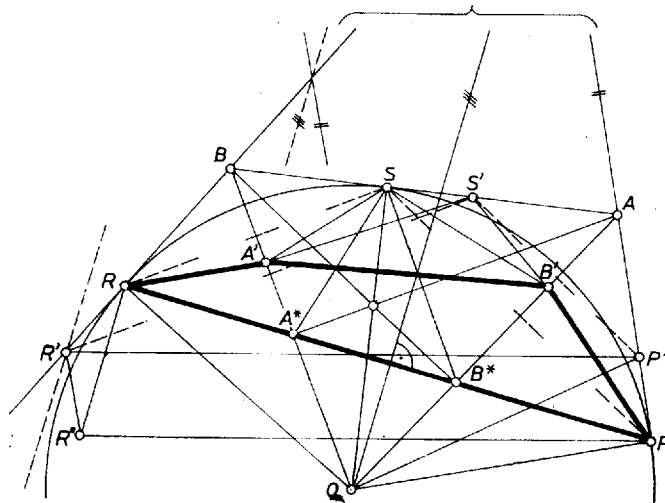


I. *S*-et először a kör rövidebb *PR* ívén vesszük fel. Legyen egy az *ABO* háromszögbe beírt háromszögnek az *AB* oldalszakaszon levő csúcsa mindjárt *S*, a *BO*, *OA* szakaszon *A'*, ill. *B'* (1. ábra).



1. ábra

E háromszög kerülete egyenlő a $PB'A'R$ töröttvonal hosszával. Ugyanis P és S , mint az A -ból húzott érintők érintési pontjai, egymás tükörképei OA -ra mint tengelyre nézve, és ugyanígy R , S az OB tengelyre szimmetrikus pontpár, tehát

$$SB' + B'A' + A'S = PB' + B'A' + A'R.$$

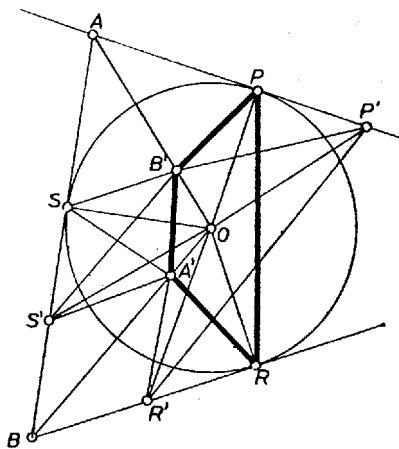
Ez valóban nem lehet kisebb a töröttvonal P, R végpontjai közti szakasznál, egyenlő is csak akkor vele, ha A', B' szerepére azt az A^*, B^* pontját választjuk az OB , ill. OA szakasznak, amelyet a PR szakasz metsz ki belőle.

S helyén az AB oldalszakasz más, S' pontját véve az $S'A'B'$ háromszög kerülete az előzőkhöz hasonlóan egyenlő annak a 3 darabból álló törött vonalnak a hosszával, melynek kezdő és végpontja S' -nek az OA , OB tengelyre vett P' , ill. R' tükörképe, közbülső töréspontjai pedig B' és A' . Az ilyen törött vonalak hossza hasonlóan nem kisebb a $P'R'$ szakasznál, így elég erről az utóbbról belátnunk, hogy nem kisebb PR -nél.

Toljuk át $P'R'$ -t a PR'' helyzetbe. A keletkezett PRR'' háromszögről mindjárt belátjuk, hogy R -nél derékszögű, ebből adódik, hogy $PR < PR'' = P'R'$. Valóban, $R'R'' = P'P = S'S = R'R$, így $R'RR''$ egyenlő szárú háromszög, RR'' párhuzamos az RR' és RR'' irányok közti szög felezőjével, ez a szög pedig egyállású a P -ben, R -ben húzott érintők közti szöggel, aminek a felezője merőleges PR -re, tehát $RR'' \perp RP$.

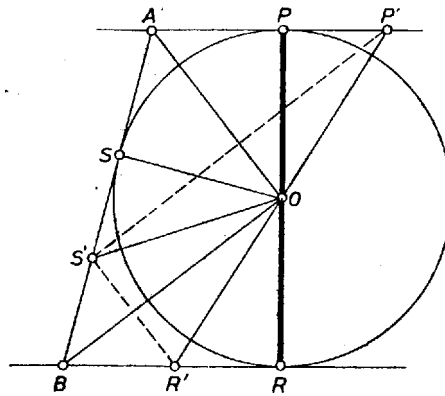
Az S -re tett korlátozás alapján $POR \triangleleft 180^\circ$, így a felhasznált háromszögek valóban léteznek, és létezik a mondott A^* , B^* pont, hiszen a PR egyenes elválasztja O -t P -től. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

II. Ha S -et a nagyobbik PR köríven választjuk, fenti megfontolásunk érvényes marad, annyiban azonban módosul, hogy az AOB háromszögbe beírt $SA'B'$, ill. $S'A'B'$ háromszögek között nem létezik a PR húr, ill. a $P'R'$ szakasz hosszával egyenlő kerületű háromszög, hiszen az OP (ill. OP') félegyenest S -en (ill. S' -n) át az OR (ill. OR') félegyenest 180°-nál nagyobb elfordulás viszi át, PR -nek (ill. $P'R'$ -nek) nincs pontja az OAB háromszög kerületén (2. ábra).



2. ábra

III. Akkor is érvényes eredeti meggondolásunk, ha P és R eleve a kör egy átmérőjének végpontjai voltak. Ekkor, bár PR (ill. $P'R'$) átmegy O -n, a fenti A^* , B^* egybeesik O -val, az SA^*B^* már elfajult háromszög lenne, ekkor – amint a **II.** esetben is – minden valódi beírt háromszög kerülete határozottan nagyobb a PR szakasznál (3. ábra).



3. ábra

Megjegyzés. Bizonyításunk lényegében megegyezik *Fejér Lipót* magyar matematikusnak (1880–1959) azzal a híres, egyszerű bizonyításával,¹ amellyel megmutatta, hogy a hegyesszögű háromszögbe beírt háromszögek között van legkisebb területű és ez a háromszög talpponti háromszöge. – Nyilvánvaló ugyanis, hogy OS az OAB háromszög magasságvonala, megmutatjuk még, hogy AA^* is merőleges OB -re. Az OPR egyenlő szárú háromszögben $POR\angle = POA\angle + AOB\angle + BOR\angle = AOS\angle + AOB\angle + SOB\angle = 2AOB\angle$, ezért $PRO\angle = 90^\circ - AOB\angle$, és így $PRB\angle = A^*RB\angle = A^*SB\angle = AOB\angle = AOA^*\angle$. Így pedig O, A, S, A^* egy körön vannak, és $OS \perp AS$ miatt e körben OA átmérő, ennél fogva $OA^*A\angle = 90^\circ$. Ugyanígy $BB^* \perp OA$.

¹Lásd pl.: *H. Rademacher – O. Toeplitz: Számokról és alakzatokról*, 2. kiadás, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954, 26–30. o.