

A feladat mindkét részében olyan C egész osztandót keresünk, melyet $\overline{BB} = 11 \cdot B$ -vel osztva és a hányadosból annak Q egész részét levonva 0 , $\overline{BB}$ és a $0,01$ -dal nagyobb szám közé eső különbséget kapunk, vagyis amelyre közönséges tört alakban

$$\frac{11 \cdot B}{100} \leq \frac{C}{11 \cdot B} - Q < \frac{11 \cdot B}{100} + \frac{1}{100},$$

ill. $1100 \cdot B$ -vel szorozva

$$(1) \quad 121 \cdot B^2 \leq 100(C - 11 \cdot Q \cdot B) < 11 \cdot B(11 \cdot B + 1).$$

Az alábbi táblázat mutatja a bal és jobb oldal értékét B szöbajjövő értékeire:

B	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$121 \cdot B^2$	121	484	1089	1936	3025	4356	5929	7744	9801
$11 \cdot B(11 \cdot B + 1)$	132	506	1122	1980	3080	4422	6006	7832	9900

A köztük levő, felülről nyílt számközbe $B = 1, 4, 5, 9$ -re nem esik kerek százaz; ha pedig

$$(2) \quad B = 2, \quad 3, \quad 6, \quad 7, \quad 8,$$

akkor az (1)-et kielégítő százazok száma rendre

$$(3) \quad Sz = 5, \quad 11, \quad 44, \quad 60, \quad 78.$$

a) Ha mármost az osztandó $C = A - B \leq 9 - 2 = 7$, tehát egyjegyű, azaz kisebb a kétjegyű $\overline{BB}$ osztónál, tehát $Q = 0$, akkor (1)-ben középen legfeljebb 700 áll, ebből $B^2 < 6$, $B < 3$. Eszerint (2)-ből és (3)-ból $B = 2$, $C = 5$ és $A = B + C = 7$ megfelel. Valóban,

$$\frac{A - B}{\overline{BB}} = \frac{5}{22} = 0,227 \dots$$

b) A feladat második részében $C = 10 \cdot A + B$, $Sz = 10 \cdot A + B - 11 \cdot Q \cdot B$, és a fentiek alapján

$$Q = \frac{10 \cdot A + B - Sz}{11 \cdot B} = \frac{10 \cdot A - Sz}{11 \cdot B} + \frac{1}{11} \leq \frac{90 - 5}{22} + \frac{1}{11} = \frac{87}{22} < 4.$$

$Q = 0$ esetén $A < B$, $Sz = 10 \cdot A + B$, vagyis Sz egyes számjegye éppen B . (2) és (3) egybevetésével egyetlen megoldásként $B = 8$, $Sz = 78$, és így $A = 7$ adódik, és $78 : 88 = 0,886 \dots$, tehát ezek az értékek megfelelnek.

$Q = 1$ esetén $A \neq B$ miatt $A > B$, $Sz = 10(A - B)$, ennek (3)-ban csak $Sz = 60$, $A - B = 6$, $B = 7$ tesz eleget, de ebből $A = 13 > 9$, ilyen megoldás tehát nincs.

$Q \geq 2$ esetén

$$\frac{10A + B}{11 \cdot B} \geq 2, \quad 21 \cdot B \leq 10 \cdot A < 91,$$

ezért (2)-ből csak $B = 2$ és 3 jön szóba, $Q = 3$ esetén pedig hasonlóan csak $B = 2$.

$Q = 2$, $B = 2$ esetén az $Sz = 10 \cdot A - 42 = 5$ egyenletből A nem egész, és ugyanez adódik a $(Q, B) = (2, 3), (3, 2), (4, 2)$ értékpárok esetében is.

Ezek szerint $Q > 0$ esetén nincs megoldás, azonban a kérdés félreértője is találhatott megoldást a $78 : 88$ osztásban.

Megjegyzések. 1. A végtelen tizedes törtek közönséges tört alakját ismerve az is megállapítható, hogy B nem lehet relatív prím 10-hez, s így a (2) felsorolásban 3 és 7 sem jöhet szóba.

2. A számjegy fogalmán a b) részben A esetében kissé tágítva a $Q = 1$ esetén talált $A = 13$, $B = 7$ is megfelel: $137 : 77 = 1,779 \dots$