

I. megoldás. Legyen n olyan háromjegyű szám, amelyben a számjegyek összege 3-szor akkora, mint a 75-tel kisebb szám számjegyeinek az összege. Jelöljük n egymás utáni jegyeit x, y, z -vel, a jegyek összegét s -sel, az $n - 75$ szám jegyeit x_1, y_1, z_1 -gyel, a jegyek összegét s_1 -gyel. Feltevésünk szerint

$$(1) \quad s = 3s_1.$$

Megvizsgáljuk, hogy az $n - 75$ kivonást a 10-es számrendszerben szokásos módon, jegyenként elvégezve, milyen esetek fordulhatnak elő. Számunkra az lesz lényeges, hogy az egyes helyi értékű jegyek meghatározásánál keletkezik-e átviendő maradék, vagy sem.

$$\begin{array}{r} x \ y \ z \\ - \quad 7 \ 5 \\ \hline x_1 \ y_1 \ z_1 \end{array}$$

a) Sehol sem keletkezik maradék, azaz

$$(2a) \quad z \geq 5, \quad y \geq 7;$$

$$\text{ekkor} \quad x_1 = x, \quad y_1 = y - 7, \quad z_1 = z - 5, \quad \text{tehát}$$

$$(3a) \quad s = s_1 + 12.$$

b) Az egyeseknél van maradék, a tízeseknél nincs, azaz

$$(2b) \quad z < 5, \quad y \geq 8;$$

$$\text{ekkor} \quad x_1 = x, \quad y_1 = y - 8, \quad z_1 = z + 5, \quad \text{tehát}$$

$$(3b) \quad s = s_1 + 3.$$

c) Az egyeseknél nincs maradék, a tízeseknél van, azaz

$$(2c) \quad z \geq 5, \quad y < 7;$$

$$\text{ekkor} \quad x_1 = x - 1, \quad y_1 = y + 3, \quad z_1 = z - 5, \quad \text{tehát}$$

$$(3c) \quad s = s_1 + 3.$$

d) Az egyeseknél is, a tízeseknél is van maradék, azaz

$$(2d) \quad z < 5, \quad y < 8;$$

$$\text{ekkor} \quad x_1 = x - 1, \quad y_1 = y + 2, \quad z_1 = z + 5, \quad \text{tehát}$$

$$(3d) \quad s = s_1 - 6.$$

Feladatunkban azonban (1) alapján $s - s_1 = 2s_1$, tehát az $s - s_1$ különbség pozitív és páros, így csak az a) eset lehetséges, hiszen a b), c) esetekben ez a különbség páratlan, a d) esetben pedig negatív. Az s, s_1 ismeretlenekre az (1), (3a) egyenletrendszer megoldva kapjuk, hogy

$$(4) \quad s = x + y + z = 18,$$

és $s_1 = 6$. Ha viszont az n szám jegyeire (4) és (2a) teljesül, akkor (3a) szerint $s_1 = s - 12 = 6$, tehát (1) is teljesül, így annak, hogy az n számnak meglegyen a kívánt tulajdonsága, szükséges és elégséges feltétele (2a) és (4) teljesülése.

Feladatunk szerint ezek között a számok között kell meghatároznunk a legkisebbet és a legnagyobbat. Legkisebb a szám, ha jegyei rendre a legkisebbek, tehát az első jegye 1-es és a másik kettő összege 17, eszerint a legkisebb, kívánt tulajdonságú szám a 189.

Mivel (2a) szerint z, y legkisebb értékei mellett is az összegük 12, így x lehető legnagyobb értéke 6 – tehát a legnagyobb előírt tulajdonságú szám a 675.

Lengyel János (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Legyen a két keresett szám n , ill. N . Mindkettő osztható 3-mal, mert számjegyeik összege egy-egy egész szám 3-szorosával egyenlő – ti. $n - 75$, ill. $N - 75$ számjegyei összegének 3-szorosával.

Így $n - 75$ és $N - 75$ is osztható 3-mal, mert 75 is osztható vele, és ha egy különbség mindkét tagja osztható egy számmal, akkor maga a különbség is osztható vele.

Eszerint $n - 75$ és $N - 75$ számjegyeinek összege $3k$, ill. $3K$ alakú szám (ahol k, K természetes számok), ezért n, N számjegyeinek összege $9k$, ill. $9K$ alakú, tehát n is, N is, osztható 9-cel.

Ezeket tudva n és N jegyeinek összegére csak 9 és 18 jön szóba. Ugyanis háromjegyű szám számjegyeinek összege legfőljebb 27 – ti. egyedül a 999 esetében –, ez viszont nem lehet N értéke, különben $N - 75$ jegyösszege 9 lenne, holott $999 - 75$ nem osztható 9-cel. Megállapításunkat visszafordítva $n - 75$ -re és $N - 75$ -re, ezek jegyeinek összege csak 3 vagy 6 lehet.

Megmutatjuk, más oldalról, hogy $n - 75$ és $N - 75$ jegyeinek összege nem lehet 3. Ugyanis egyrészt e számok így alakíthatók:

$$n - 75 = 9m - 75 = 9(m - 9) + 6, \quad N - 75 = 9(M - 9) + 6.$$

Vagyis 9-cel osztva 6-ot adnak maradékul. Másrészt általában bármely egész számot 9-cel osztva a (legkisebb nem-negatív) maradék ugyanannyi, mintha a szám (tíz-es számrendszerbeli alakja) számjegyeinek összegét osztjuk 9-cel. Valóban, legfőljebb háromjegyű számokra szorítkozva az A , B , C jegyekkel írt szám így írható

$$100A + 10B + C = 9(11A + B) + (A + B + C),$$

tehát a $(100A + 10B + C) : 9$ és $(A + B + C) : 9$ osztások maradéka egyező.

Ezek szerint $n - 75$ és $N - 75$ jegyeinek összegét 9-cel osztva a maradék 6, és ezt a fentiekkel egybevetve maga az összeg is 6. Ebből pedig adódik, hogy n és N számjegyeinek összege 18.

A legkisebb szóba jövő n érték, 189, mindjárt megfelel, mert így $189 - 75 = 114$, jegyösszege 6.

Megfelel $N - 75$ legnagyobb szóba jövő értéke, 600 is, mert így $N = 675$, jegyeinek összege 18.