

Legyen a három autó rendre K_1 , K_2 , K_3 , az utóbbinak a sebessége v (km/óra), menetideje a K_1 eléréséig x (óra), végül az AB távolság s (km). Ekkor K_1 az utoléréséig $t_1 + x$ órát futott, K_2 és K_3 teljes menetideje pedig $t_1 + x + t_2 + t_3$, ill. $x + t_2$. A megfelelő utakat a két-két kocsi adataival kifejezve és egyenlővé téve két egyenletet kapunk az x , v ismeretlenekre:

$$\begin{aligned} (1) \quad & v_1(t_1 + x) = vx, \\ (2) \quad & v_2(t_1 + x + t_2 + t_3) = v(x + t_2) \end{aligned}$$

(1)-et $x + t_2$ -vel, (2)-t x -szel szorozva a jobb oldalak egyenlők lesznek, így a bal oldalak is. Az x -re így adódó másodfokú egyenletet rendezve a következőt kapjuk:

$$(v_1 - v_2)x^2 + \{(v_1 - v_2)(t_1 + t_2) - v_2t_3\}x + v_1t_1t_2 = 0.$$

Ez – a $v_2 \neq v_1$ feltevés miatt – valódi másodfokú egyenlet, első együtthatója és x -től mentes tagja a feladat szövege szerint pozitív, ezért a várakozásnak megfelelő, azaz pozitív gyöke csak akkor lehet, ha x együtthatója negatív:

$$(v_1 - v_2)(t_1 + t_2) - v_2t_3 < 0,$$

amiből az életszerű megoldás szükséges – de nem elegendő – feltétele:

$$(3) \quad t_3 > \frac{v_1 - v_2}{v_2}(t_1 + t_2).$$

A megoldás valós voltának szükséges és elegendő feltétele pedig az, hogy a diszkrimináns pozitív vagy 0 legyen:

$$(4) \quad (v_1 - v_2)^2(t_1 + t_2)^2 - 2(v_1 - v_2)[2v_1t_1t_2 + v_2(t_1 + t_2)t_3] + v_2^2t_2^2 \geq 0.$$

Ennek további elemzésétől – bonyolultsága miatt – eltekintünk, csak annyit jegyzünk meg, hogy ha (4) a $>$ jellel teljesül, két pozitív megoldás van, ha pedig az $=$ jellel, akkor egy (természetesen feltéve, hogy (3) teljesült).

x ismeretében (1) alapján

$$v = \frac{v_1(t_1 + x)}{x},$$

végül a távolság, (2) jobb oldalából

$$s = v(x + t_2) = \frac{v_1(x + t_1)(x + t_2)}{x}.$$

II. Mármost a numerikus adatokkal a (4) diszkrimináns értéke 0 és (3) teljesül, így egyetlen megoldás van:

$$x = 2 \text{ óra}, \quad v = 120 \text{ km/óra}, \quad s = 360 \text{ km}.$$

Horváth Ervin (Süttő, Ált. Isk., 7. o. t.)
Francia Ferenc (Veszprém, Lovassy L. Gimn., II. o. t.)