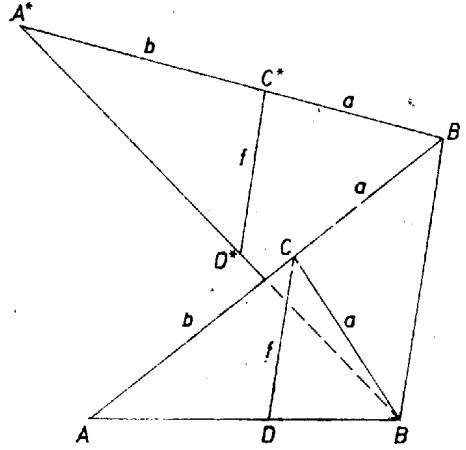


I. megoldás. Legyenek az adott oldalszakaszok $CB = a$, $CA = b$ (ahol $a \leq b$) és $CD = f$.
Ötletet ad a szögfelező osztásarányára vonatkozó, ismert tétel bizonyításához használt ábra (1. ábra).



1. ábra

Mérjük rá CA -nak C -n túli meghosszabbítására a $CB^* = CB = a$ szakaszt, így CBB^* egyenlő szárú háromszög, $B^*B \parallel CD$, $AB^*B \triangle \sim ACD \triangle$,

$$BB^* = DC \cdot \frac{AB^*}{AC} = f \frac{a+b}{b}.$$

Ez az adatokból megszerkeszthető, és belőle az ábra rekonstruálható: BB^*C egyenlő szárú háromszög, BB^*CD trapéz, végül BD és B^*C metszéspontja A .

A szerkesztés helyességéhez meg kell mutatni, hogy az adódó AC szakasz hossza b . Valóban

$$\begin{aligned} AB^* : AC &= B^*B : CD, \\ 1 + \frac{a}{AC} &= \frac{BB^*}{CD} = 1 + \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

A szerkesztés végrehajtható, ha $BB^* < 2a$, amit f -re megoldva

$$(1) \quad f < \frac{2ab}{a+b}.$$

Az ábrán $A^*C^* = b$, $C^*B^* = a$, $C^*D^* = f$, és a B^* -on átmenő, C^*D^* -gal párhuzamos egyenesnek A^*D^* -gal való metszéspontja B .

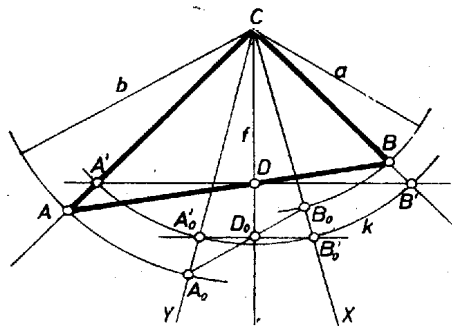
Balogh Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn., I. o. t.)

II. megoldás. Az eddigi jelölések mellett jelöljük a CD -re D -ben emelt merőlegesnek az AC , BC egyenesen levő pontját A' -vel, ill. B' -vel. Az 1169. gyakorlatban¹ láttuk, hogy $A'C$ az a és b szakaszok harmonikus középarányosa:

$$A'C = h = \frac{2ab}{a+b},$$

ami a , b alapján (pl. az idézett helyen leírt eljárással) megszerkeszthető. Így az $A'B'C$ egyenlő szárú háromszög is, és ebből a keresett ABC háromszög is könnyen előállítható.

Induljunk ki egy tetszőleges $XC Y$ szögből: mérjük fel ennek a száraira a $CB_0 = a$, $CA_0 = b$ szakaszokat (2. ábra).



¹K. M. L. 37 (1968) 70. o. Másféppen

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

2. ábra

Jelöljük a szögfelező és A_0B_0 metszéspontját D_0 -lal, a CD_0 -ra D_0 -ban emelt merőlegesnek a szárakon levő pontjait A'_0 -vel, B'_0 -vel. Mérjük fel a CD_0 szögfelezőre a $CD = f$ szakaszt, és messe a CD -re D -ben emelt merőleget a C középpontú, CA'_0 sugarú k kör az A' , B' pontokban. Végül mérjük fel a CA' , CB' egyenesekre a $CA = b$, $CB = a$ szakaszokat, a kapott ABC háromszög a keresett háromszög.

Szerkesztésünk helyességének bizonyításához csak azt kell megmutatnunk, hogy az AB oldalt a C -hez tartozó szögfelező D -ben metszi. Jelöljük ezt a metszéspontot D_1 -gyel, az AD_1 -re D_1 -ben emelt merőlegesnek a szárakon levő pontjait A'_1 -gyel, B'_1 -gyel. Az 1169. gyakorlat szerint

$$A'_1C = h = \frac{2ab}{a+b},$$

és ez szerkesztésünk szerint egyenlő CA'_0 -vel. A'_1 , B'_1 tehát rajta van k -n, így rendre azonos A' -vel, B' -vel, amiből már következik, hogy D_1 és D azonosak.