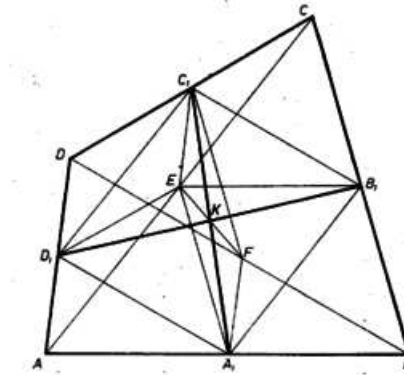


A négyszög mindegyik középvonala az egyik szemben fekvő oldalpár felezőpontjait köti össze, és a két középvonal egy paralelogramma két átlóját adja, ezért a középvonalak felezik egymást. Ugyanis az $ABCD = N$ négyszög AB , BC , CD , DA oldalának felezőpontját rendre A_1 , B_1 , C_1 , D_1 betűvel jelölve A_1B_1 az ACB háromszögnek, C_1D_1 az ACD háromszögnek AC -vel párhuzamos középvonala, és ezért $A_1B_1 \# C_1D_1 = AC/2$.



Legyen az A_1C_1 és B_1D_1 középvonalak közös felezőpontja K , az AC és BD átló felezőpontja E , ill. F . Megmutatjuk, hogy esetünkben E azonos K -val, továbbá F -fel is, vagyis N átlói felezik egymást; ebből már következik a feladat állítása, hiszen A -t E -re tükrözve C -t, B -t F -re tükrözve pedig D -t kapjuk, tehát $E \equiv F$ esetén a négyszög centrálszimmetrikus.

Az előbbihez hasonló megfontolással EA_1 és C_1F a BCA , ill. BCD háromszög középvonala, s így

$$EA_1 \# \frac{CB}{2} \# C_1F,$$

tehát EA_1FC_1 paralelogramma, E és F egymás tükörképei az A_1C_1 átló K felezőpontjára nézve.

Tekintsük az A_1 , C_1 , E ponthármaszt. Ezekre

$$A_1E + EC_1 \geq A_1C_1,$$

és itt egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha E az A_1C_1 szakaszon van. A bal oldalon álló szakaszokat az oldalakkal kifejezve

$$(1) \quad \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} \geq A_1C_1,$$

Hasonlóan a B_1 , D_1 , E ponthármasból

$$(2) \quad B_1E + ED_1 = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} \geq B_1D_1,$$

és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha E a B_1D_1 szakasz pontja.

Mármost (1)-et és (2)-t összeadva

$$\frac{AB + BC + CD + DA}{2} \geq A_1C_1 + B_1D_1,$$

a feltevés szerint viszont itt egyenlőség áll. Ez csak úgy lehet, hogy (1)-ben is, (2)-ben is egyenlőség áll, tehát E rajta van az A_1C_1 szakaszon is, B_1D_1 -en is, tehát azonos K -val, és ezért F -fel is. Ebből az előrebocsátottak szerint következik a feladat állítása.