

Két szám különbségét és hányadosát – ha a sorrend nincs kifejezetten kimondva – úgy szoktuk érteni, hogy az elsőből vonjuk ki a másodikat, illetve az elsőöt osztjuk a másodikkal. Ebben az értelemben a második számot y -nal és a hányadosot q -val jelölve, az első szám $x = qy$, és a követelmény

$$(1) \quad (x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = (q + 1)y + (q - 1)y + qy^2 + q = A,$$

ahol $A = 800$, ill. a második kérdés esetében $A = 400$. Itt $q = \frac{x}{y}$ -nak egész számnak kell lennie, mert a bal oldal többi száma és A is egész.

Egyenletünk így írható:

$$q(2y + y^2 + 1) = A, \quad (y + 1)^2 = \frac{A}{q},$$

eszerint – mivel y és a bal oldal egész –, q az A -nak olyan osztója, mellyel osztva hányadosul négyzetszámot kapunk.

I. Mármost az első kérdésben prímtényezős felbontása alapján

$$800 = 2^5 \cdot 5^2 = 2 \cdot (2^2 \cdot 5)^2,$$

tehát egy megoldás $q = 2$.

Figyelembe kell vennünk azonban minden lehetőséget a zárójel valamelyik négyzet-osztójának q -hoz csatolására. $2^2 \cdot 5 = 20$ osztói 1, 2, 4, 5, 10 és 20, a q -nak így adódó lehetséges értékeit és a belőlük adódó megoldásokat a táblázat tartalmazza.

q	2	$2 \cdot 2^2$	$2 \cdot 4^2$	$2 \cdot 5^2$	$2 \cdot 10^2$	$2 \cdot 20^2$
A/q	400	100	25	16	4	1
$y+1$	± 20	± 10	± 5	± 4	± 2	± 1
y_1	19	9	4	3	1	0
x_1	38	72	128	150	200	0
y_1	-21	-11	-6	-5	-3	-2
x_2	-42	-88	-192	-250	-600	-1600

A 12 értékpárból egyedül az utolsó oszlopbeli $y = 0$, $x = 0$ nem fogadható el, mert így a hányados nincs értelmezve. Eszerint $A = 800$ esetében a kérdéses számpárra 11 megoldást kaptunk.

II. Hasonlóan kapjuk a megoldásokat $A = 400 = (2^2 \cdot 5)^2$ esetében; a táblázat $(y + 1)^2$ és $y + 1$ sora ugyanaz lenne, mint a fentiben, ezért csak az y , x értékpárokat soroljuk fel:

q	1	2^2	4^2	5^2	10^2	20^2
y_1	19	9	4	3	1	–
x_1	19	36	64	75	100	–
y_1	-21	-11	-6	-5	-3	-2
x_2	-21	-44	-96	-125	-300	-800

Itt is 11 megoldás van.